

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)

Кафедра физики Земли
Направление «Физика»



ПРИМЕНЕНИЕ ДИФРАГИРОВАННЫХ ВОЛН
ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОНКОСЛОИСТЫХ СРЕД ПРИ НАЛИЧИИ
РАЗЛОМОВ

Магистерская диссертация студентки

Титовой Анны Викторовны

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

Каштан Борис Маркович

Рецензент

Коммерческий директор ООО «ГЕОДЕВАЙС»

Игнатьев Владимир Иванович

Санкт-Петербург

2017

Оглавление

Введение	3
Физические основы сейсморазведки	4
Уравнения движения	5
Уравнение движения жидкости	6
Однородные среды	7
Уравнение движения жидкости в однородной среде	7
Уравнение упругости в однородной среде	7
Неоднородные среды	8
Решение акустического уравнения	9
Лучевое разложение для уравнения упругости	10
Отраженные и проходящие волны	11
0.0.1 Сферические волны	13
Сферические волны	13
Основы теории дифрагированных волн	17
История развития теории дифракции	17
Геометрическая теория дифракции	20
Законы геометрической теории дифракции	20
Алгоритм решения задач дифракции при помощи ГТД	23
Ограничения лучевого метода и зона полутени	24
Поведение дифрагированных волн в окрестности границы свет-тень	25
Решение задачи дифракции в угловых областях	27
Поля дифрагированных волн в акустических средах	31
Кинематический анализ дифрагированных волн	31
Амплитудный анализ дифрагированных волн	43
Применение дифрагированных волн для построения тонкослоистых сред при наличии разломов	50
Геологические предпосылки	52
Моделирование данных	54
Скоростная модель среды	54

Схема наблюдений	56
Результаты численного моделирования	57
Обработка данных	60
Скоростной анализ	60
Разделение волновых полей	61
Анализ когерентности	62
Заключение	66
Литература	67
Приложение 1. Вывод акустического уравнения	71
Приложение 2. Решение акустического уравнения лучевым методом	73
Приложение 3. Вывод формулы для нахождения угла α	78
Приложение 4. Преобразование Гильберта	80

Введение

Применение дифрагированных волн при решении обратных задач сейсморазведки играет ключевую роль для отображения мелкомасштабных нарушений сложно-построенных геологических сред. Тонкослоистая среда, смещенная по разлому, является одним из примеров таких сложно-построенных геологических сред.

Основная задача работы состоит в изучении основных кинематических и динамических свойств дифрагированных волн, а также их применения в процедурах обработки данных.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и четырех приложений.

Во введении обоснована актуальность исследования и сформулированы цели работы.

В первой главе представлены физические основы сейсморазведки.

Во второй главе описываются основные этапы истории развития теории дифракции, геометрическая теория дифракции и решение задачи дифракции в угловых областях.

Третья глава посвящена кинематическому и динамическому анализу дифрагированных волн в акустических средах.

В четвертой главе описываются способы применения дифрагированных волн при решении обратных задач сейсморазведки, в частности их применения для построения тонкослоистых сред при наличии разломов.

В заключении сформулированы общие выводы по исследованию, представленному в диссертации.

В приложении 1 представляется вывод акустического уравнения.

Приложение 2 посвящено решению акустического уравнения лучевым методом.

В приложении 3 описываются вспомогательные вычисления для аналитического построения волновых фронтов.

В приложении 4 изложены основные теоретические сведения, касающиеся преобразования Гильберта.

Физические основы сейсморазведки

Упругие волны являются одним из основных инструментов изучения недр Земли [1]. Волны, зарегистрированные на поверхности Земли, несут в себе информацию о ее внутреннем строении, в том числе о наличии и местонахождении жидких и твердых полезных ископаемых.

Волна – изменение некоторой совокупности физических величин, которое способно перемещаться (распространяться), удаляясь от места его возникновения, или колебаться внутри ограниченных областей пространства [2]. Волновой процесс может иметь самую различную физическую природу: механическую, химическую, электромагнитную, гравитационную и т.д. При решении задач теоретической сейсмологии и сейсморазведки исходят из предположения о том, что процесс распространения волн имеет механическую природу. Это означает, что распространение волн связано с изменением взаимного положения частиц тела в пространстве и во времени и с взаимодействием между ними [3].

Поскольку геологические среды включают в себя вещества, находящиеся в различных агрегатных состояниях, будем рассматривать движение как “жидких”, так и “твердых” частиц. Под выражением «жидкие» и «твердые» частицы следует понимать малый элемент объема жидкого или твердого тела. При этом рассматриваемый элемент объема тела считается все-таки настолько большим, что содержит еще очень большое число молекул, но достаточно малым по сравнению с объемом всего тела [4]. Теория, занимающаяся описанием движения твердого тела или жидкости, оперирует макроскопическими понятиями, так как в ней рассматриваются расстояния, большие по сравнению с межмолекулярными. Поэтому радиус действия молекулярных сил в теории упругости принимается равным нулю. Таким образом, под частицей среды подразумевается не отдельная молекула, а целый элемент объема среды, содержащий много молекул, но рассматриваемый в механике сплошных сред как точка.

При распространении волны следует отличать два совершенно различных явления: движение частиц среды в волне и перемещение самой волны в среде. Первое явление — это движение частиц, как материальных точек; второе явление — переход возмущенного состояния среды с одних частиц на другие [5]. Изучение механики жидкостей является предметом гидромеханики, а изучение механики твердого тела — теории упругости.

Для внутреннего строения Земли выбор идеально упругой модели объясняется тем, что кинематические выводы из уравнений теории упругости о типах существующих волн и законах распространения волновых фронтов, а также динамические следствия из уравнений идеальной упругости находятся в согласии с экспериментом [1]. Для волновых явлений, выходящих за рамки идеальной упругой модели Земли, необходимо вводить новые предположения об изу-

чаемой среде с учетом тех или иных особенностей процесса распространения волн. Однако, в настоящее время отсутствуют надежные критерии для однозначного выбора математических уравнений, описывающих процессы распространения волн. В связи с этим, зачастую в основу обработки сейсмических наблюдений полагается точная теория, основанная на идеальной упругой модели.

Другое предположение, которое используется при описании распространения упругих волн в Земле, заключается в малости относительных деформаций упругой среды при приложении к ней искусственных (например, взрывов, вибрационных колебаний) или естественных (землетрясений) воздействий. Это предположение в большинстве случаев позволяет ограничиться результатами линейной динамической теории упругости, основанной на законе Гука. В ее основе лежит разложение упругой энергии в ряд по степеням тензора деформаций с точностью до квадратичных членов (членов второго порядка). В соответствии с этим разложением компоненты тензора напряжений оказываются линейными функциями компонент тензора деформаций, а уравнения движения — линейными уравнениями.

Наиболее важной особенностью упругих волн в таком приближении является возможность представления волн в виде суперпозиции простейших монохроматических волн. При этом можно говорить об отсутствии взаимодействия монохроматических волн друг с другом в процессе распространения. Однако, существует большое количество явлений, которые не укладываются в линейную теорию упругости. К таким явлениям, представляющим интерес с точки зрения сейсмологии и сейсморазведки, относятся, например, упругие поля, возникающие при мощных ядерных взрывах, в очагах землетрясений. Явление возникновения упругой анизотропии среды при приложении к ней мощных статистических воздействий также требует привлечения нелинейной теории [1].

В данной работе будет рассматриваться только линейная теория упругости.

Уравнения движения

Рассмотрим распространение возмущений в стационарных изотропных неоднородных средах. В этом случае параметры среды λ , μ и ρ зависят только от координат и не зависят от направления и времени распространения $\lambda = f(\mathbf{x})$, $\mu = f(\mathbf{x})$ и $\rho = f(\mathbf{x})$. Возмущение в трехмерной упругой среде описывается вектором смещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, определяющим отклонение материальной точки (частицы среды) от ее положения до прихода возмущения. Здесь и далее векторная величина обозначается жирным шрифтом, а скалярная — простым. Распространение волновых полей в неоднородной линейной упругой среде описывается уравнением движения:

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \overrightarrow{\text{Div}} \mathbf{t}_{ik} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{\text{Div}} \mathbf{t}_{ik} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k \text{div} \mathbf{t}_k, \quad (2)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор смещений, $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ — тензор напряжений, $\rho(\mathbf{x})$ — плотность упругой среды, $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ — упругие параметры Ламе, \mathbf{f} — вектор плотности массовых сил.

Закон Гука в линейной теории упругости имеет следующий вид

$$t_{ik} = c_{ik,lm} \epsilon_{lm}, \quad (3)$$

где $c_{ik,lm}$ — тензор упругих параметров,

$$\epsilon_{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) \quad (4)$$

— тензор деформаций Грина.

В случае изотропной среды тензор упругих параметров имеет достаточно простую структуру

$$\begin{pmatrix} \lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

поэтому закон Гука можно записать в виде

$$t_{ik}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (6)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Подставляя выражение (6) в выражение (1), получаем линейное уравнение движения для поля упругих смещений:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla \mu \times \nabla \times \mathbf{u} + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (7)$$

где $\nabla = \operatorname{grad}$ — оператор дифференцирования вида $\vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$, $\Delta = \nabla^2$ — оператор Лапласа, который при применении к векторной функции имеет следующий смысл: $\Delta \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}$, $\nabla \times \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$, $\nabla \cdot \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{u}$, символ “ \times ” означает операцию векторного произведения, а символ “ \cdot ” — скалярного произведения.

Уравнение движения жидкости

Частным случаем уравнения движения идеальной упругой изотропной среды является акустическое уравнение. В этом случае состояние среды в каждой точке характеризуется плотностью $\rho(\mathbf{x})$, давлением $p(\mathbf{x}, t)$ и упругим параметром Ламе $\lambda(\mathbf{x})$. Второй параметр Ламе $\mu(\mathbf{x})$, который также называют модулем сдвига, в жидких и газообразных средах равен нулю $\mu(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому тензор напряжений t_{ik} (6) записывается в виде

$$t_{ik} = \lambda(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta_{ik} = \lambda(\mathbf{x}) (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \delta_{ik}. \quad (8)$$

Уравнение движения (7) при этом записывается в виде

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \nabla \left(\lambda(\mathbf{x}) (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \right) + \mathbf{f}. \quad (9)$$

Для описания движения идеальной несжимаемой жидкости обычно используют скалярное акустическое уравнение, которое определяет распространение поля давления $p(\mathbf{x}, t)$ в среде:

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \Delta p(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \rho(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t), \quad (10)$$

где $c(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\lambda(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})}}$ — скорость распространения возмущения. Вывод уравнения (10) представлен в Приложении 1.

Однородные среды

Изотропными и однородными средами называют такие среды, физические параметры которых в каждой точке среды постоянные $\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 = \text{const}$, $\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 = \text{const}$ и $\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_0 = \text{const}$.

Уравнение движения жидкости в однородной среде

В случае однородной среды акустическое уравнение записывается в виде

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \Delta p(\mathbf{x}, t), \quad (11)$$

где $c_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\rho_0}}$ — скорость распространения возмущения. Решением уравнения (11) являются функции

$$p_1(\mathbf{x}, t) = F(t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}), \quad (12)$$

$$p_2(\mathbf{x}, t) = F(t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}), \quad (13)$$

где F — дважды непрерывно-дифференцируемая функция, $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{k}}{\omega}$ — вектор медленности. Решение p_1 соответствует возмущению, распространяющемуся в положительном направлении \mathbf{x} , а решение p_2 — возмущению, распространяющемуся в отрицательном направлении \mathbf{x} .

Что касается движения жидкости (9), то в однородной среде уравнение принимает следующий вид

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \lambda \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f} \quad (14)$$

и описывает распространение волнового поля \mathbf{u} вдоль направления распространения со скоростью $v = \frac{\lambda}{\rho}$.

Уравнение упругости в однородной среде

В однородной среде уравнение движения упругой среды (7) принимает вид уравнения Ламе:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}, \quad (15)$$

которое описывает распространение векторного поля \mathbf{u} . Согласно теореме разложения Гельмгольца, любое дифференцируемое векторное поле можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального векторных полей:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad (16)$$

где векторное поле \mathbf{u}_1 характеризуется безвихревым смещением частиц среды $\text{rot}\mathbf{u}_1 = 0$ и описывает распространение продольной волны \mathbf{u}_p , а векторное поле \mathbf{u}_2 характеризуется отсутствием изменения объема (вихревыми смещениями) $\text{div}\mathbf{u}_2 = 0$ и описывает распространение поперечной волны \mathbf{u}_s [6]. Подставляя разбиение (16) в уравнение (15) можно получить два “разделенных” уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \Delta \mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_1, \quad (17)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \mu \Delta \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_2, \quad (18)$$

где вектор плотности массовых сил представлен в виде суммы двух слагаемых $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, каждое из которых удовлетворяет соответствующему соотношению $\text{div}\mathbf{f}_2 = 0$ и $\text{rot}\mathbf{f}_2 = 0$.

Введем обозначения $v_p^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ и $v_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$, тогда уравнения (17) и (18) перепишутся в виде волновых уравнений:

$$\frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_1, \quad (19)$$

$$\frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_2. \quad (20)$$

Таким образом, уравнение (15) описывает распространение двух независимых волновых полей \mathbf{u}_p и \mathbf{u}_s . Величины v_p и v_s имеют смысл скорости распространения, соответственно, продольной и поперечной волн. Получение разделенных уравнений подробно описано в книге [7].

Регулярное решение для неоднородных волновых уравнений (14) и (15), описывающих распространение волн в однородной изотропной стационарной среде, можно найти так же используя формулу Кирхгофа. Однако, решение волновых уравнений для однородной среды не представляет большого интереса для сейсмологии и сейсморазведки, так как все реальные геологические среды неоднородны и анизотропны.

Неоднородные среды

В случае распространения волны в неоднородной среде, когда упругие параметры Ламе зависят от пространственных координат \mathbf{x} , явного решения уравнений движения (7), (9) и акустического уравнения (10) построить не удастся. Однако, можно построить высокочастотные асимптотики таких решений при помощи лучевого метода, согласно которому, решение уравнения движения представляется в виде лучевого ряда [8].

Решение акустического уравнения

Описание лучевого метода начнем с решения акустического уравнения (10). Этот случай является наиболее простым, так как уравнение (10) является скалярным. Акустическое уравнение для неоднородной среды в области без источников записывается в следующем виде

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) - \frac{\rho(\mathbf{x})}{\lambda(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \rho(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (21)$$

Представим поле давления $p(\mathbf{x}, t)$ в виде Фурье-преобразования по времени:

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\pi} \Re \int_0^\infty P(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (22)$$

где символ \Re обозначает вещественную часть интеграла.

После подстановки формулы (79) в уравнение (78) получаем дифференциальное уравнение в частных производных относительно спектральной функции $P(\mathbf{x}, \omega)$:

$$\Delta P(\mathbf{x}, \omega) - \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \rho(\mathbf{x}) \cdot \nabla P(\mathbf{x}, \omega) - \Delta P(\mathbf{x}, \omega) + \omega^2 \frac{\rho(\mathbf{x})}{\lambda(\mathbf{x})} P(\mathbf{x}, \omega) = 0. \quad (23)$$

Будем искать решение в виде лучевого ряда

$$P(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\mathbf{x})}{(i\omega)^n} e^{-i\omega \tau(\mathbf{x})}, \quad (24)$$

где функции $A_n(\mathbf{x})$ и $\tau(\mathbf{x})$ предполагаются гладкими и медленно меняющимися с пространственной координатой \mathbf{x} . Функция $\tau(\mathbf{x})$ называется волновым фронтом и определяет поле времен: поверхность $\tau(\mathbf{x}) = t$ соответствует положению волнового фронта в момент времени t . Разложение выполнено по размерному параметру — обратным степеням частоты ω . Также можно выполнить разложение и по безразмерному параметру, в который наряду с обратной степенью частоты входят геометрические и другие характеристики конкретной задачи [9]. Преимущество записи (81) состоит в том, что она позволяет в наиболее простой форме учесть и использовать специфику поведения волнового поля на высоких частотах для целого класса задач [8].

Подстановка представления амплитуды в виде лучевого ряда (81) в уравнение (80) позволяет получить систему рекуррентных уравнений относительно функций $A_n(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} - (\nabla \tau)^2 &= 0, \\ -\frac{A_0 \nabla \rho \cdot \nabla \tau}{\rho} + A_0 \Delta \tau + 2 \nabla A_0 \cdot \nabla \tau &= 0, \\ A_1 \Delta \tau - \frac{A_1 \nabla \rho \cdot \nabla \tau}{\rho} + 2 \nabla A_1 \cdot \nabla \tau + \frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_0}{\rho} - \Delta A_0 &= 0, \\ &\dots \\ A_{n+1} \Delta \tau - \frac{A_{n+1} \nabla \rho \cdot \nabla \tau}{\rho} + 2 \nabla A_{n+1} \cdot \nabla \tau + \frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_n}{\rho} - \Delta A_n &= 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение называется уравнением эйконала и позволяет определить фазовую функцию $\tau(\mathbf{x})$. Последующие рекуррентные линейные уравнения называются уравнениями переноса. Решая второе уравнение из рекуррентной системы уравнений можно найти амплитудную функцию в нулевом приближении A_0 :

$$A_0 = \phi_0(\alpha, \beta) \sqrt{\frac{c\rho}{J}}, \quad (25)$$

где J — якобиан перехода от прямоугольных координат (x_1, x_2, x_3) к лучевым координатам (α, β, τ) . В большинстве задач геофизики ограничиваются нулевым (или, как его еще называют геометросейсмическим или геометрооптическим) приближением A_0 . Однако в некоторых особых случаях, например при описании волнового поля лучевым методом в зонах каустики, нулевого приближения недостаточно, и следует рассматривать следующие приближения амплитудной функции. В связи с этим выпишем выражение, определяющее решение уравнения переноса для последующих членов лучевого ряда:

$$A_n = \sqrt{\frac{\rho c}{J}} \left(\phi_n(\alpha, \beta) + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{\frac{J}{c\rho}} \frac{c^2}{2} \left(\frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_{n-1}}{\rho} + \Delta A_{n-1} \right) d\tau \right). \quad (26)$$

Вывод формулы (26) представлен в Приложении 2.

Второе слагаемое формулы (26) описывает влияние предыдущего приближения, т.е. A_{n-1} , из-за взаимодействия (продольной и поперечной диффузии амплитуды) соседних лучевых трубок [10]. Это слагаемое в виде интеграла описывает историю взаимодействия амплитуд от τ_0 до τ . Поскольку A_{n-1} в свою очередь связано с A_{n-2} , то фактически второе слагаемое — это влияние на A_n всех предыдущих приближений от A_0 до A_{n-1} включительно [10].

После определения постоянных интегрирования τ_0 и τ из соображения локальности, можно построить амплитудный множитель $A(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\mathbf{x})}{(i\omega)^n}$, подстановка которого в разложение (81) позволяет построить высокочастотную асимптотику акустического уравнения для неоднородной среды (10) [8].

Лучевое разложение для уравнения упругости

Алгоритм решения уравнения упругости в неоднородных средах (7) во многом повторяет алгоритм решения акустического уравнения для неоднородной среды, за исключением небольших изменений. Для уравнения упругости в лучевом разложении (81) скалярная функция $A_n(\mathbf{x})$ заменяется векторными функциями $\mathbf{u}_n(\mathbf{x})$ [6]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{u}_n(\mathbf{x})}{(i\omega)^n} e^{i\omega(t-\tau(\mathbf{x}))}. \quad (27)$$

Вывод рекуррентной системы уравнений делается несколько иным способом, но в итоге оказывается, что уравнение эйконала сохраняется, а уравнения переноса заменяются системой уравнений для векторных амплитуд. Итак, первое уравнение из новой рекуррентной системы уравнений приводит к двум уравнениям эйконала, первое из которых будет соответствовать

продольной волне, поляризованной вдоль луча и распространяющейся со скоростью v_p , а второе – поперечной волне, поляризованной ортогонально лучу и распространяющейся со скоростью v_s в среде [6].

Следующее (второе) уравнение новой рекуррентной системы уравнений определит амплитуду волнового поля в нулевом приближении $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^p + \mathbf{u}_0^s$, где \mathbf{u}_0^p описывает векторное поле, имеющее составляющие только в направлении вдоль луча, а \mathbf{u}_0^s — поле, имеющее составляющие только в направлении ортогонально лучу. Индексы p и s обозначают продольную и поперечную волны.

Что касается амплитуды в первом приближении $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^p + \mathbf{u}_1^s$, то оказывается, что, например, волна \mathbf{u}_1^p уже поляризована не только вдоль луча, как это имеет место в нулевом приближении, а также и ортогонально лучу. То же самое происходит и с волной \mathbf{u}_1^s , имеющей теперь составляющие как в направлении ортогонально лучу, так и в направлении вдоль луча. Обычно компоненту, поляризованную по типу волны (вдоль луча для продольной волны и ортогональную лучу для поперечной волны) называют основной, а компоненту, отвечающую нехарактерной для данной волны поляризации — примесной. Наличие примесных компонент и выражает тот факт, что в случае неоднородных сред поле упругих смещений уже не может быть разделено на два независимых волновых поля [6].

Таким образом, уравнения переноса лучевого разложения для уравнения упругости представляют систему уравнений относительно четырех неизвестных векторов. Как и в акустическом случае, система является рекуррентной и должна решаться последовательно для возрастающих индексов n . При этом следует помнить, что каждый из неизвестных векторов состоит из двух компонент — основной и примесной. Примесная компонента определяется из предыдущего приближения, так что фактически эта система является системой относительно основных компонент n -ого приближения. Основная компонента для поперечной волны ортогональна лучу и поэтому может быть однозначно определена двумя составляющими. Удобно представлять эту компоненту в виде составляющих в плоскости падения (SV) и перпендикулярной плоскости падения (SH). При этом система двух векторных уравнений распадается на две системы — первая состоит из четырех уравнений для продольных волн и SV-компонент поперечной волны, а вторая система из уравнений для SH-компонент поперечной волны. Подробное описание решения уравнения движения упругих волн в форме лучевого ряда рассмотрено в [6].

Отраженные и проходящие волны

При падении волны (продольной или поперечной) на границу раздела двух сред, где претерпевают разрыв упругие параметры или их производные, образуются четыре новых волны — отраженная продольная, отраженная поперечная, преломленная продольная и преломленная поперечная. Пусть поле падающей волны представлено в виде лучевого ряда (27). Поля отраженных и преломленных волн также представляются в виде лучевых рядов. Поля падающей, отраженной и преломленной волн должны удовлетворять условиям на границе. В случае

жесткого контакта на поверхности S граничные условия выглядят следующим образом:

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^3(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^4(\mathbf{x}, t), \quad (28)$$

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{u}^0) + \mathbf{t}_n(\mathbf{u}^1) + \mathbf{t}_n(\mathbf{u}^3) = \mathbf{t}_n(\mathbf{u}^2) + \mathbf{t}_n(\mathbf{u}^4), \quad (29)$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности S , \mathbf{u}^0 — поле падающей волны, \mathbf{u}^1 — поле отраженной продольной волны, \mathbf{u}^2 — поле преломленной продольной волны, \mathbf{u}^3 — поле отраженной поперечной волны, \mathbf{u}^4 — поле преломленной поперечной волны.

Это условие должно выполняться во все моменты времени t , поэтому из него прежде всего следует, что

$$e^{i\omega(t-\tau^0(\mathbf{x}))} = e^{i\omega(t-\tau^\nu(\mathbf{x}))}, \quad (30)$$

где $\nu = 1, 2, 3, 4$. Кроме того, аргументы всех этих функций на поверхности S должны быть равны, откуда вытекает равенство эйконалов падающей, отраженной и преломленной волн на поверхности S :

$$\tau^0(S) = \tau^\nu(S), \quad (31)$$

где $\nu = 1, 2, 3, 4$.

Из равенства эйконалов следует, что должны быть равны и производные эйконалов по любому направлению на поверхности S . Выберем два взаимно перпендикулярных направления в точке пересечения луча падающей волны с границей: x — в плоскости касательной к лучу, а y — перпендикулярно ему. Производные по направлениям запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau^0(S) = \frac{\partial}{\partial x} \tau^\nu(S), \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \tau^0(S) = \frac{\partial}{\partial y} \tau^\nu(S) = 0, \quad (33)$$

где $\nu = 1, 2, 3, 4$. Следствием первого условия является связь угла падения с углами отражения и преломления:

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau = \frac{\sin \theta}{V}, \quad (34)$$

$$\frac{\sin \theta_0}{V_0} = \frac{\sin \theta_\nu}{V_\nu}, \quad (35)$$

где $\nu = 1, 2$. Второе условие показывает, что при отражении и преломлении луч остается в плоскости падения. Исходя из вышесказанного сформулируем закон Снеллиуса: луч, падающий на границу раздела сред, обуславливает в общем случае появление двух отраженных лучей (продольного и поперечного) и двух преломленных лучей (продольного и поперечного). Падающий, отраженные и преломленные лучи лежат в одной плоскости, которая содержит нормаль к границе раздела сред в точке падения. Углы падения, отражения и преломления связаны соотношением

$$\frac{\sin \theta_\nu}{V_\nu} = \text{const}, \quad (36)$$

где $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$, θ_ν — угол падения ($\nu = 0$), отражения ($\nu = 1, 3$), преломления ($\nu = 2, 4$), монотипных ($n = 1, 2$) и обменных ($n = 3, 4$) волн, а V_ν скорость распространения вдоль соответствующего луча.

При падении волнового поля на границу с изломом образуются краевые дифрагированные волны. Направление их распространения можно описать с помощью обобщенного закона Снеллиуса, который был сформулирован Келлером [11]. Подробнее о дифрагированных волнах будет рассказано во второй главе.

0.0.1 Сферические волны

Пусть в однородном акустическом пространстве расположен точечный источник. Распространение в среде возмущения, начавшегося в источнике, описывается уравнением

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta p(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}_s, t), \quad (37)$$

где $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ — радиус-вектор в трехмерном пространстве, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — оператор Лапласа, $c_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\rho_0}}$ — скорость распространения возмущения, $p(\mathbf{x}, t)$ — поле давления, $f(\mathbf{x}_s, t)$ — функция источника, \mathbf{x}_s — местоположение источника. Уравнение (48) является неоднородным трехмерным волновым уравнением. Решение этого уравнения, отвечающее уходящей от источника волне, записывается в виде функции [12]

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} f\left(t - \frac{r}{c_0}\right), \quad (38)$$

описывающей распространение волны, фронтом которой является сфера с центром в точке источника \mathbf{x}_s и радиусом $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|$. Поверхность волнового фронта, отделяет область, захваченную возмущением, от области покоя и определяется уравнением

$$\tau(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|}{c_0} = \text{const}, \quad (39)$$

Если рассматривается распространение волновых полей в двумерном случае, то уравнение (48) становится двумерным неоднородным волновым уравнением, решением которого является функция

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{r}} f\left(t - \frac{r}{c_0}\right), \quad (40)$$

описывающая распространения волны, фронтом которой является цилиндрическая поверхность.

Процесс распространения волн от точечного источника в среде, состоящей из двух однородных упругих или акустических полупространств, граничащих вдоль плоскости удобно изучать исходя из концепции распространения волновых фронтов.

Рассмотрим распространение волнового фронта от точечного источника в акустической среде. Предположим, что скорость распространения волн давления в среде 1, в которой расположен источник, меньше скорости распространения волн в среде 2 (рис. 1). При падении на плоскую границу раздела волна давления образует отраженную и преломленную волны. Если падает сферическая волна, то фронт отраженной волны, как и фронт падающей, будет сферическим, а фронт преломленной волны — сфероидальным [6].



Рис. 1. Фронты падающей, отраженной и преломленной волн сходятся в одной точке, в которую к данному моменту пришло возмущение.

Пока фронт падающей волны пересекает границу раздела под углом, меньшим критического, фронты волн будут иметь вид, показанный на рис. 1. В момент времени, когда угол падения волны на границу становится больше критического, картина волновых полей претерпевает изменения. Фронт преломленной волны как бы отрывается от фронта падающей и распространяется вдоль границы раздела с большей скоростью (рис. 2). Опережающее движение этой волны в высокоскоростной среде вдоль плоскости раздела возбуждает колебания частиц в приконтактной области верхней низкоскоростной среды [13]. Это порождает здесь волну нового типа, называемую головной волной. Фронт головной волны имеет коническую форму, в связи с чем головные волны иногда называют коническими. В зарубежной литературе встречается использование термина “волна Минтропа” для обозначения головной волны.

При падении волны под углом, превышающим критический угол, возникает неоднородная волна, отличающаяся от волн, рассмотренных ранее, у которых поверхности постоянной амплитуды и фазы совпадают. Неоднородная волна распространяется параллельно границе раздела, при этом ее амплитуда экспоненциально затухает с глубиной [14]. Никакая энергия этой волны не переносится от границы раздела во вторую среду, поэтому за критическое отражение называется полным внутренним отражением.

В связи с этим, критическая точка делит фронт отраженной волны на две различающиеся по характеру отражения части: неполное отражение, когда угол падения меньше критического угла, и полное отражение, когда угол падения превосходит критический угол.

Случай падения фронта волны на границу раздела двух упругих сред изображен на рис. 3. Продольное возмущение, источником которого является расположенный в среде с меньшей скоростью точечный источник, при падении на границу раздела двух сред обуславливает появление отраженных продольных, отраженных поперечных волн и преломленных продольных,

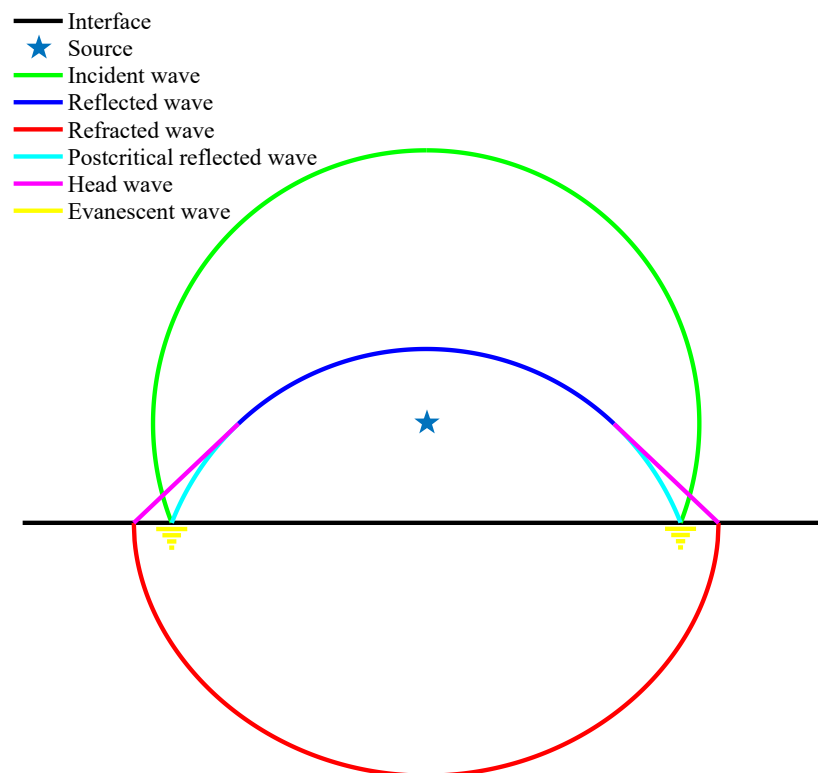


Рис. 2. Фронты падающей, отраженной и преломленной волн при закритическом падении. Образование головной и неоднородной волн.

преломленных поперечных волн. Фронт каждой волны распространяется с соответствующей скоростью. Когда угол падения достигает критического угла, образуются обменные головные волн. То есть головные волны могут быть образованы не только в результате преломления продольной волны, но и в результате преломления поперечной. Условие образования головных волн состоит в том, что скорость хотя бы одной из образующихся на границе волн должна быть больше скорости падающей волны.

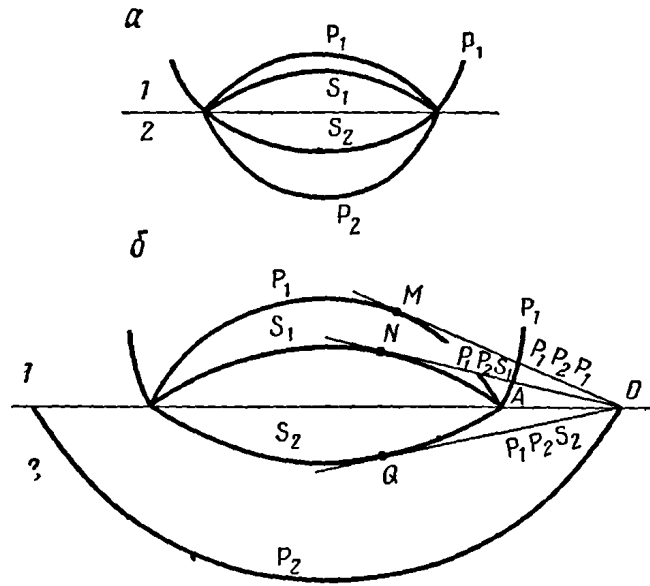


Рис. 3. Схема образования отраженных, преломленных и головных волн: а) падающая под углом меньше критического продольная волна P_1 способствует образованию отраженной продольной волны P_1 , отраженной поперечной волны S_1 , преломленной продольной волны P_2 и преломленной поперечной волны S_2 ; б) в момент времени, когда угол пересечения фронта падающей продольной волны с границей больше критического угла, тогда кроме P_1 , P_2 , S_1 и S_2 образуются также головные волны MD , ND и QD . Головная волна MD образовалась в результате падения P_1 , распространения вдоль границы волны P_2 и преломления в первую среду P_1 . Головная волна ND образовалась в результате падения P_1 , распространения вдоль границы волны P_2 и преломления в первую среду S_1 . Головная волна QD образовалась в результате падения P_1 , распространения вдоль границы волны P_2 и преломления во вторую среду S_2 [6].

Основы теории дифрагированных волн

История развития теории дифракции

Развитие теории распространения волн тесно связано с развитием оптики. К началу 17 века в оптике уже были сформулированы основные законы распространения света. Закон отражения был сформулирован независимо тремя учеными – Томасом Харриоттом в 1602, Виллебродом ван Ройеном Снеллом в 1621 и Рене Декартом в 1644. Закон преломления был сформулирован Пьером де Ферма в 1657 году. Кроме того он сформулировал принцип наименьшего времени.

Явление дифракции впервые было описано в экспериментах Иоганнеса Маркуса фон Кронланда в 1648 г. в Богемии и Франческо Мариини Гримальди в 1660 г. в Болоньи. Пальму первенства в открытии явления дифракции обычно отдают Гримальди, так как в трудах, опубликованных после его смерти в 1665г., содержится первое упоминание термина “дифракция”.

В заключении книги Гримальди сообщает: Из эксперимента (рис. 4) следует, что свет иногда распространяется в своеобразной моде, а не в одной из трех мод, признанных оптиками, а именно не в прямой моде, не в отраженной моде и не в преломленной моде, а в четвертой моде, которая должна быть идентифицирована с новым именем. Эту моду мы называем дифрагированной, поскольку в этой моде свет рассеивается. Слово дифракция от латинского глагола *diffractus* означает “разбиваться в разные стороны”.

Исаак Ньютон сделал огромный вклад в развитие классической физики. К возможности отклонения распространения света от прямолинейного Ньютон относился скептически. Распространение света в зону геометрической тени Ньютон объяснял добавляя лучам света свойство “легкой передачи и отражения”, в связи с этим на титульном листе его монографии “Оптика” (рис. 5) присутствует слово “Inflection”.

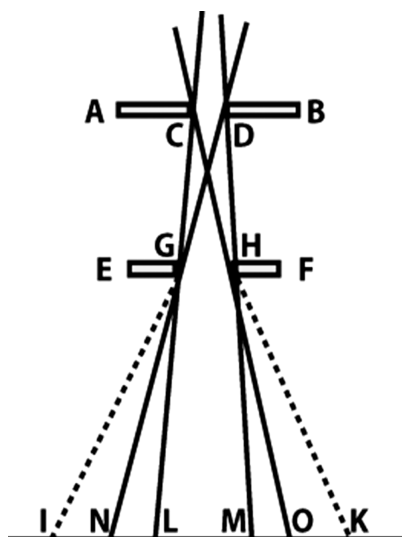


Рис. 4. Детали эксперимента Гримальди: конус света, проходящий через два малых отверстия (CD и GH) падает на белый экран, создавая пятно (IK), которое намного больше, предсказанного геометрической оптикой (ON) [15].

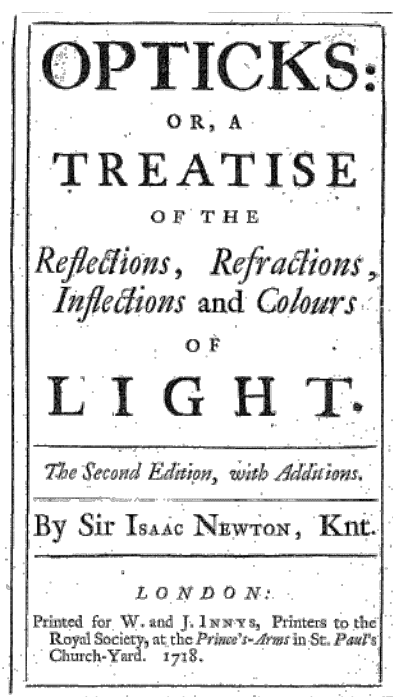


Рис. 5. Титульный лист монографии Ньютона “Оптика”.

Авторы книги [15] утверждают, что между историческим развитием оптики, в частности, теории дифракции, и современными теориями дифракции существует поразительная связь. В развитие дифракционной теории внесли огромный вклад работы Гюйгенса, Юнга и Френеля. Гюйгенс в конце XVII века сформулировал принцип: когда волна проходит через материю, каждая точка на волновом фронте должна рассматриваться как источник новой сферической волны, имеющий такую же фазу и такую же скорость распространения, величина которой, в свою очередь, зависит от свойств среды. Этот принцип также называют принципом вторичных

источников. Что касается явления дифракции, то Гюйгенс, по-видимому, знал об исследовании Гримальди, но не был убежден в его истинности.

Следуя за ходом рассуждений Томаса Юнга и Августина Френеля, пытающихся объяснить природу явления дифракции, можно увидеть, что возникают два возможных объяснения. Юнг полагал, что явление дифракции возникает из-за взаимодействия двух лучей: луча, распространяющегося беспрепятственно, и луча, выходящего локально из края препятствия. Френель соединил принцип интерференции Юнга с принципом вторичных источников Гюйгенса и объяснил распространение любой, в том числе дифрагированной, волны как интерференцию волн, порождаемых вторичными источниками.

Таким образом, дифракционная картина в объяснении Юнга обусловлена взаимодействием “краевого” луча, касающегося края полуплоскости (препятствия), с лучом, на пути которого препятствий нет. С другой стороны, согласно Френелю, дифракционная картина обусловлена интерференцией всех вторичных волн, которые при этом не блокируются препятствиями. В настоящее время существуют два математических описания явления дифракции, которые достаточно точно отражают различные точки зрения Юнга и Френеля.

Развитием работ Гюйгенса, Юнга и Френеля является интеграл Густава Роберта Кирхгофа. Кирхгоф доказал, что поле смещений $u(x_1, x_2, x_3, t)$ во внешнем, по отношению к источникам, однородном пространстве может быть определено при известном распределении величин смещений и их производных на некоторой замкнутой поверхности Q , окружающей источники:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi} \int_Q \left([u] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] - \frac{1}{vr} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \right) dQ, \quad (41)$$

где r — расстояние от точки наблюдения $C(x_1, x_2, x_3)$ до точек поверхности Q , по которой ведется интегрирование; v — скорость упругой волны, n — направление внутренней нормали к поверхности Q ; величины, заключенные в квадратные скобки, взяты для опережающих моментов времени $t' = t - \frac{r}{v}$. Интеграл Кирхгофа выражает дифракционную природу сейсмического поля. При этом слово дифракция здесь следует понимать в смысле слова, описывающего процесс рассеяния. Смещение, наблюдаемое в точке C , является суперпозицией множества колебаний, приходящих в точку C от всех элементарных источников, расположенных на поверхности Q [13]. Однако, в связи с тем, что интеграл трудно вычислять, наиболее часто используют высокочастотное приближение (приближение геометрической оптики), которое во многих случаях является хорошо применимым [15].

Джиан Антонио Магги и Арнольд Иоганесс Вильгельм Рубинович показали, что две точки зрения Юнга и Френеля тесно связаны между собой [16]. Магги показал, что интеграл Кирхгофа можно представить в виде линейного интеграла по границе угловой области, который был интерпретирован Рубиновичем в терминах краевой (или граничной) дифракционной волны Юнга. Таким образом, математическая формулировка Магги и Рубиновича показывает, как и предполагал Юнг, что дифракция является локальным явлением и дифрагированные лучи связаны с ребрами и геометрическими разрывами в поверхностях.

В 1953 году Джозеф Келлер предложил расширить концепцию лучей геометрической оптики, включив в нее дополнительные дифрагированные лучи: лучи, падающие на ребра или

вершины, и лучи, соскальзывающие с поверхности. Он ввел новые законы отражения и преломления для этих лучей и сформулировал обобщенный принцип Ферма, распространяющийся на дифрагированные лучи [11].

Геометрическая теория дифракции (ГТД), предложенная Келлером, представляет собой эвристическое расширение геометрической оптики, которое сочетает в себе лучевые и теоретические концепции. Таким образом, существует два взаимодополняющих подхода к решению дифракционных задач: первый подход основан на интегральных методах, а второй — на понятии локально дифрагированных лучей.

Геометрическая теория дифракции

Остановимся подробнее на описании геометрической теории дифракции (ГТД), так как посредством этой теории можно объяснить явление дифракции как с математической стороны, так и с физической.

Законы геометрической теории дифракции

ГТД совмещает в себе законы геометрической оптики (ГО) и четыре новых закона.

Первый закон геометрической теории дифракции

Конгруенции дифрагированных лучей порождаются только теми лучами падающего поля, которые являются “крайними лучами” с точки зрения ГО, т.е. образуют границу свет-тень.

Второй закон геометрической теории дифракции

Каждый луч падающего поля, удовлетворяющий первому закону ГТД, порождает бесконечное множество дифрагированных лучей. При падении луча первичного поля на острие дифрагированные лучи уходят от него во всех направлениях, тем самым образуя сферическую волну. При падении луча на ребро дифрагированные лучи в каждой точке образуют конус (краевая волна). Закон образования дифрагированных лучей в области тени гладкого выпуклого тела отличен от закона образования лучей у острий и ребер.

Рассмотрим сначала общий случай падения плоской волны на ребро. Лучевая структура краевой волны определяется следующим образом: угол полураствора конуса дифрагированных лучей равен углу ω между кромкой (ребро угла) и падающим лучом l_0 . Падающий луч и конус дифрагированных лучей лежат по разные стороны от нормали, проведенной в точку падения.

Усложнение лучевой структуры краевой волны связано с двумя факторами: изменением угла $\omega(\sigma)$ вдоль кромки и изменением ориентации кромки (σ — расстояние, измеряемое вдоль кромки) (рис. 6). Изменение $\omega(\sigma)$ означает изменение угла раствора конуса, изменение ориентации кромки — изменение направления оси конуса. Оба фактора могут действовать как

порознь, так и совместно. Например, при падении сферической волны на полуплоскость ориентация кромки не зависит от σ , а угол $\omega(\sigma)$ изменяется вдоль кромки. Наоборот, при падении на диск сферической волны, центр которой находится на оси диска, угол $\omega(\sigma) = \frac{\pi}{2}$ не зависит от σ , и изменяется только ориентация кромки.

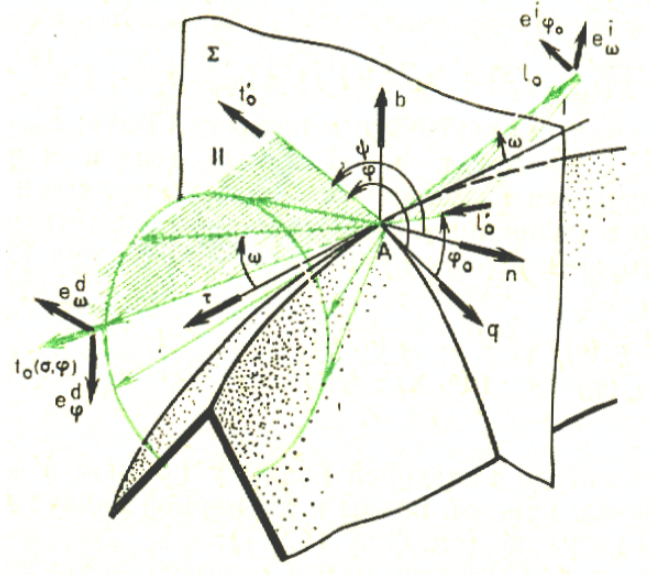


Рис. 6. Лучевая структура краевой волны в трехмерном случае [10].

Направления лучей $\mathbf{t}_0(\sigma, \omega)$ краевой волны в общем случае определяется как:

$$\mathbf{t}_0(\sigma, \omega) = \boldsymbol{\tau}(\sigma) \cos \omega(\sigma) + \mathbf{n}(\sigma) \sin \omega(\sigma) \cos \phi + \mathbf{b}(\sigma) \sin \omega(\sigma) \sin \phi, \quad (42)$$

где $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} , \mathbf{b} — касательная, нормаль и бинормаль к кромке в точке $A(\sigma)$: $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}_0}{d\sigma}$, $\mathbf{n} = R \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}$, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau}(\sigma) \times \mathbf{n}(\sigma)$, R — радиус кривизны кромки, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ — уравнение кромки. Таким образом, геометрия краевой волны определяется только формой кромки, а не формой граней [10].

Рассмотрим более простой случай падения плоской волны u_{in} (красные стрелки) на четверть-плоскость (рис. 7). В статье [17] ищется решение задачи падения плоской акустической волны на идеальную четверть-плоскость. Прилагательное идеальная тут используется для того, чтобы передать смысл граничных условия на поверхности четверть-плоскости. Идеальными граничными условиями считаются условия либо Неймана, либо Дирихле. В связи с чем, у каждой вторичной волны на рисунке 7 присутствуют верхние индексы d, n , обозначающие, что поле удовлетворяет либо условию Неймана, либо условию Дирихле. Полное поле для такой задачи будет иметь достаточно сложную структуру: отраженная плоская волна $u_{re}^{d,n}$, конические дифрагированные волны $u_{co1}^{d,n}$, $u_{co2}^{d,n}$, переотраженные конические дифрагированные волны $u_{co12}^{d,n}$, $u_{co21}^{d,n}$ и сферическая дифрагированная волна от вершины четверть-плоскости.

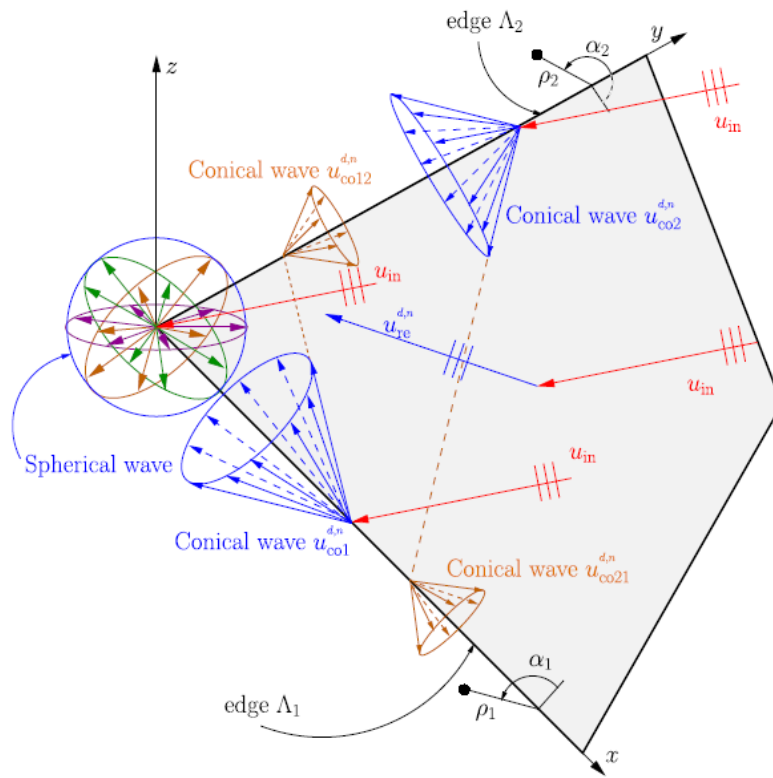


Рис. 7. Падение плоской акустической волны на идеальную четверть-плоскость [17].

В случае, когда падающий луч лежит в плоскости, нормальной к поверхности ребра, фронт дифрагированной волны будет цилиндрическим, и будет лежать в этой же плоскости (рис. 8). При решении двумерных задач падающий луч всегда лежит в плоскости ортогональной к поверхности ребра, поэтому в двумерных задачах фронт краевой волны является цилиндрическим.

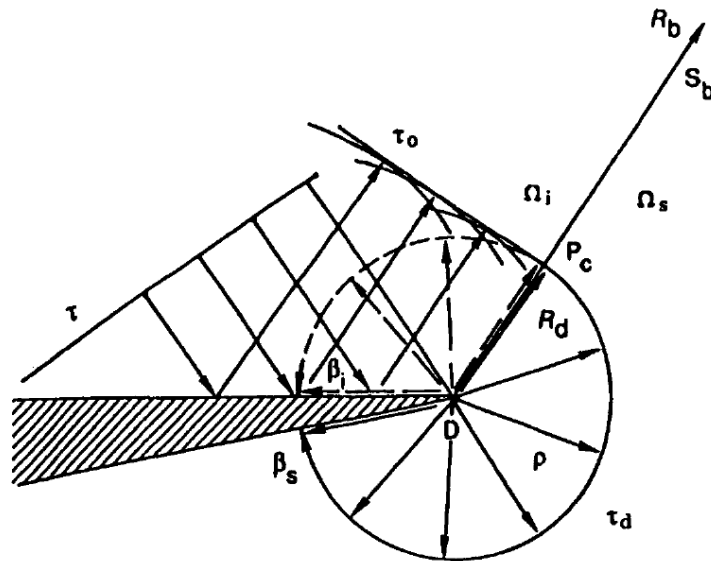


Рис. 8. Геометрическая схема, описывающая падение плоской волны на клин в двумерном случае [18].

На рисунке 8 изображены: τ — волновой фронт падающей плоской волны, τ_0 — волновой

фронт отраженной плоской волны, τ_d — волновой фронт дифрагированной цилиндрической волны. Прямая линия ребра клина, перпендикулярна плоскости рисунка и поэтому на рисунке эта линия переходит в точку D . Граница геометрической тени S_b совпадает с “крайним лучом” R_b отраженной волны и с лучом R_d дифрагированной волны. Дифрагированные лучи распространяются из точки D на клине как в освещенную зону Ω_i , так и в зону геометрической тени Ω_s . Углы β_i и β_s задают угловые размеры освещенной зоны и зоны тени, соответственно.

Положение любой точки, расположенной в плоскости падения в окрестности точки дифракции D , может быть записано с помощью полярной системы координат (ρ, β) с центром в точке дифракции D , при этом выбор откуда будет отсчитываться угол β может быть произвольным (либо от одной из границ клина, либо от границы геометрической тени). Цилиндрический фронт дифрагированной волны в освещенной области Ω_i нарисован пунктирной линией для большей наглядности [18].

Третий закон геометрической теории дифракции

Третий закон геометрической теории дифракции определяет амплитуды дифрагированных волн. В ГО амплитуды отраженной и проходящей электромагнитных волн определяются формулами Френеля. В ГТД амплитуда дифрагированной волны пропорциональна амплитуде порождающей ее волны (падающей, отраженной, преломленной) в точке падения.

$$u_{dif} = \frac{e^{iks}}{J} D(\mathbf{t}_{in}, \mathbf{t}_{dif}) u_{in}, \quad (43)$$

где J — якобиан перехода к лучевым координатам (величина пропорциональная площади поперечного сечения лучевой трубки); \mathbf{t}_{in} , \mathbf{t}_{dif} — направления (орты) падающего и дифрагированного лучей, u_{in} — амплитуда падающей волны в той точке ребра или острия, из которой выходит рассматриваемый дифрагированный луч, или для дифракции на гладком теле — в той точке горизонта, из которой начинается поверхностный луч, порождающий рассматриваемый дифрагированный луч [10].

Четвертый закон геометрической теории дифракции

Коэффициент дифракции D определяется локальными особенностями геометрии тела в окрестности падающего луча (в случае остриев и ребер). Коэффициент D находится из модельных задач: коэффициент дифракции решаемой задачи находится из анализа точного решения сходной по геометрии (“простейшей”) задачи. В связи с чем применение ГТД отграничено имеющимся набором возможных решений.

Алгоритм решения задач дифракции при помощи ГТД

Основная идея ГТД заключается в нахождении решения задачи дифракции в форме суммы волновых полей (компонент), удовлетворяющих в первом приближении законом геометрической оптики:

$$u = \sum_n u_n = \sum_n A_n e^{iks(n)} = u_0 + u_r + u_t + u_d + \dots, \quad (44)$$

где u_0 — первичное (падающее) поле, u_r — поле отраженной волны, u_t — поле проходящей волны. При этом волновые поля имеют различное происхождение:

- геометросейсмические поля, образование которых посредством отражения и преломления описывается законами ГО;
- дифрагированные волны, механизм возбуждения которых находится вне этих законов.

Каждое из геометрооптических полей (u_0 , u_r , u_t), отлично от нуля в области, границами которой являются поверхность тела и граница свет-тень этого поля (рис. 8). Слагаемые в этой сумме определяются по законам ГО (u_r , u_t) или по законам ГТД (u_d).

Решение в виде (44) ищется всюду за исключением узких переходных зон, где неприменима геометрическая оптика:

- зоны, прилегающие к поверхности тел (например, окрестности ребер и вершин);
- зоны, расположенные в свободном пространстве — вдали от тел (например, окрестность каустик).

Ограничения лучевого метода и зона полутени

В случае, когда луч падающей волны попадает на резкий излом границы (ребро), то появляется дифрагированная волна. Луч геометросейсмической волны, обуславливающий появления краевой (дифрагированной) волны называется “крайним лучом”, так как разделяет пространство на две зоны, зону геометрической тени и освещенную зону. Окрестность “крайнего луча” является зоной каустики, в которой геометрическая оптика, а также ее приближение — лучевые разложения — не применимы. Это связано с тем, что погрешность приближения ГО и лучевых разложений возрастает, когда точка наблюдения начинает приближаться к каустике, а на самой каустике эти приближения обращаются в бесконечность [10]. В связи с этим лучевые разложения также иногда называются неравномерными асимптотическими разложениями. Для изучения волновых полей в областях полутени используются другие математические методы анализа [6]:

1. равномерные асимптотические разложения, погрешность которых остается ограниченной (и стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$) независимо от того, насколько близко точка наблюдения подходит к каустике;

2. метод пограничного слоя.

Полутеневым полем называют решение уравнения Гельмгольца, которое вдали от переходной зоны расщепляется на сумму “сильного” геометросейсмического поля u_0 (существующего лишь в освещенной области) и “слабого” краевого поля u_{diff} . Равномерная асимптотика полутеневого поля переходит вдали от переходной зоны в сумму лучевых разложений полей u_0 и u_{diff} в освещенной области и в лучевое разложение u_{diff} в теневой области.

Поведение дифрагированных волн в окрестности границы свет-тень

Характер поля дифрагированной волны различен в окрестности границы свет-тень и в остальной области пространства. В окрестности границы свет-тень возникают интенсивные дифрагированные волны, обусловленные диффузией амплитуды. Уравнение вида (26) описывает диффузию амплитуды. Если решается задача дифракции, то такое уравнение будет описывать диффузию амплитуды дифрагированной волны. В уравнении присутствует векторный дифференциальный оператор ∇ , который означает взятие производной от амплитуды вдоль трех направлений в трехмерном случае (и вдоль двух направлений в двумерном случае). Будем обозначать каждое из направлений через координатные орты e_1 (продольная диффузия) и e_2, e_3 (поперечная диффузия). Можно показать [19], что в окрестности границы свет-тень амплитуда дифрагированной волны сравнима по интенсивности с амплитудой геометросейсмической волны, и при этом быстро изменяется только в направлении орта e_2 . Таким образом, основной вклад в диффузию амплитуды вносит поперечная диффузия, в связи с чем окрестность границы свет-тень называют областью поперечной диффузии.

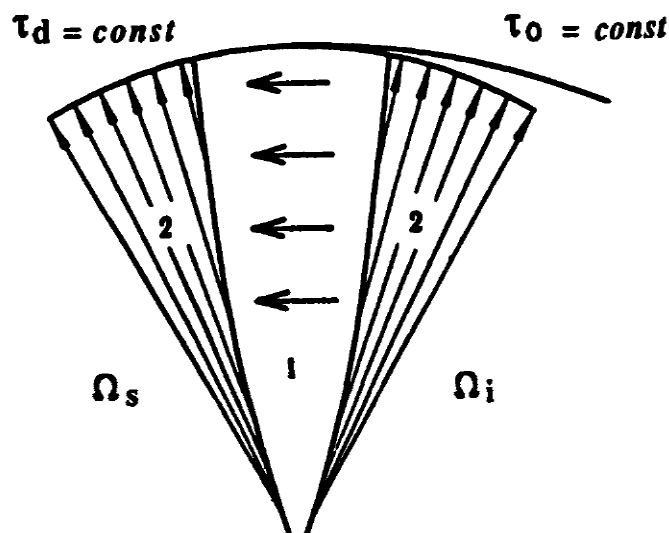


Рис. 9. Схематическое изображение области поперечной диффузии сейсмической энергии при переходе от освещенной области к зоне тени [18].

На рис. 9 представлено схематическое изображение области поперечной диффузии сейсмической энергии при переходе от освещенной области к зоне тени. Поперечная диффузия преобладает в окрестности границы свет-тень, известной как пограничный слой (область 1 на рисунке), а перенос энергии вдоль луча происходит вне пограничного слоя: в областях, помеченных цифрой 2. Заметим, что волновой фронт τ_0 обычных сейсмических объемных волн, существующих в освещенной области Ω_i , касается фронта дифрагированной волны τ_d на границе свет-тень [18].

В зоне глубокой тени явление поперечной диффузии амплитуды слабо выражено, так как градиенты амплитуды становятся слишком малыми. Перенос энергии здесь происходит вдоль лучей. Дифрагированные волны в первом приближении удовлетворяют законам ГО. Именно поэтому решение в виде (44) можно искать везде, за исключением окрестности области поперечной диффузии.

В двумерном случае, если на границе тени стационарное геометросейсмическое поле имеет разрыв амплитуды, равной u_B , то поле дифрагированной волны для достаточно высоких частот $kr \gg 1$ выражается формулой:

$$u_{diff} = \pm u_B W\left(\theta \sqrt{\frac{kr}{\pi}}\right) e^{i(\omega t - kr)}, \quad (45)$$

где r, θ — цилиндрические координаты рассматриваемой точки относительно ребра, угол θ отсчитывается от границы свет-тень. Знак “+” берется, когда точка наблюдения расположена в зоне тени, знак “—” — в освещенной области [6]. Функция $W(z)$ является комплексной и выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию:

$$W(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \phi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{i\pi z^2}{2}\right). \quad (46)$$

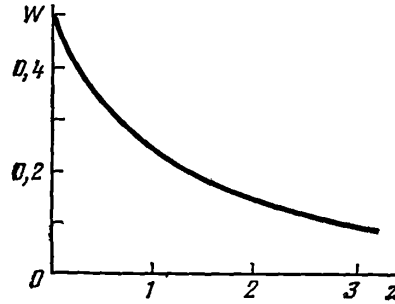


Рис. 10. График модуля функции $W(z)$ [6].

Область, в которой поле дифрагированной волны u_{diff} изменяется по приведенной выше формуле, приближенно ограничена поверхностью

$$kr\theta^2 = 4\pi^2, \quad (47)$$

которая отделяет зону эффективной диффузии от зоны глубокой тени.

В связи с выражением (45) можно сказать, что фаза дифрагированной волны изменяется на 180° в точке, где фронт дифрагированной волны касается фронта стационарной геометросейсмической волны (рис. 11 , 12).

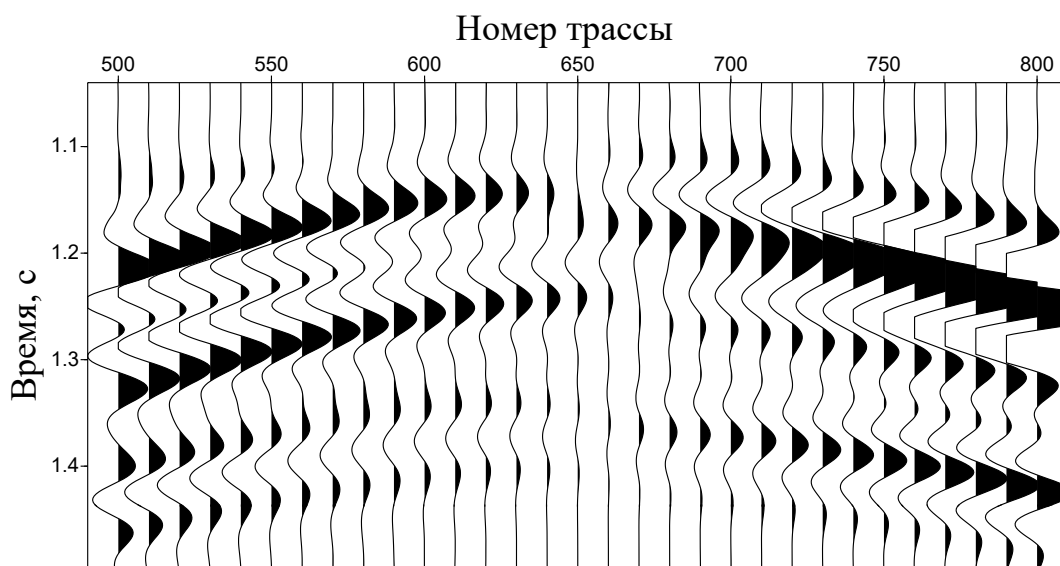


Рис. 11. Фрагмент синтетической сейсмограммы. Справа и слева от трассы с номером 650 фаза дифрагированной волны различается на 180° .

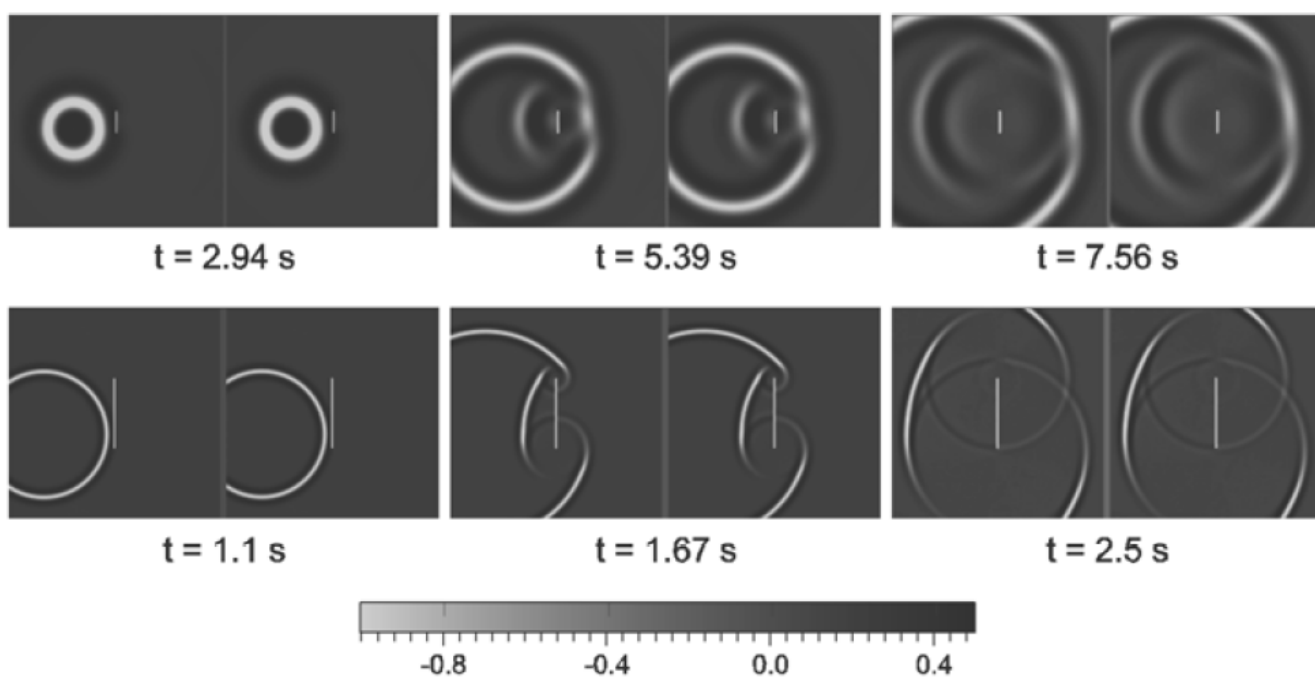


Рис. 12. Снимки волнового поля, при падении цилиндрической волны на тонкую щель. В зонах геометрической тени падающей волны четко видно обращение фазы дифрагированной волны [20].

Решение задачи дифракции в угловых областях

Изучение дифрагированных волн от клина начинается с двух статей Жюль Анри Пуанкаре, опубликованных в 1892 и 1896 годах [21], [22]. Пуанкаре первый сформулировал задачу о дифракции волн в угловых областях, как краевую задачу математической физики. Аналитиче-

ское решение этой задачи было дано А. Зоммерфельдом в 1896 году [23], [24], который впервые предложил для описания волн интегралы, впоследствии получившие его имя. В середине 20 века Г.Д. Малюжинец нашел решение задачи о рассеянии акустической плоской волны на клине с импедансными граничными условиями, используя представление решения в виде интегралов Зоммерфельда [25]. Работы Малюжинцева оказались революционным прорывом в данной тематике, поскольку благодаря идее о поиске решения в виде интеграла Зоммерфельда стало возможным однотипным образом решать задачи дифракции в угловых областях при различных краевых условиях и вне зависимости от величины угла, сводя дело к функционально-разностным уравнениям [26].

Решению задачи о рассеянии волн на упругом клине посвящено большое количество работ [25]. Наиболее интересной из них является работа французских математиков Лебо и Круазеля, которые разработали новый метод решения задач о рассеянии волн в угловых областях. Постановка задачи в [27] нетрадиционна: волна называется “уходящей”, если её можно представить в виде суммы специального вида потенциалов простого слоя с плотностями, принадлежащими достаточно сложно определяемому классу обобщенных функций. Осуществляя преобразование Фурье этих плотностей получаем спектральные функции, сингулярности которых соответствуют отражённым, преломлённым и головным волнам.

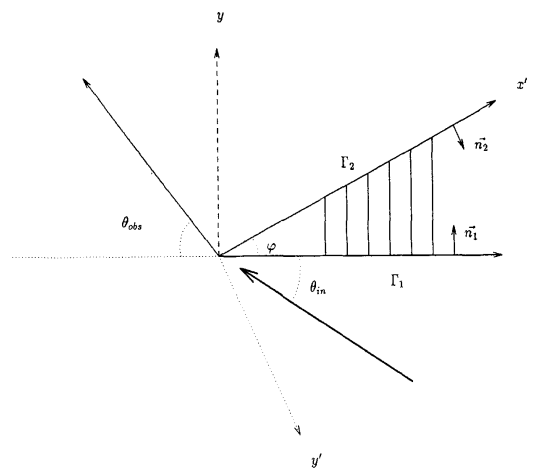


Рис. 13. Геометрия задачи [27].

Работа [27] посвящена изучению поведения волнового поля при рассеянии на упругом клине. Авторы изучили специальный случай: рассеяние плоской волны, распространяющейся в жидкости на погруженном в жидкость упругом клине.

При падении плоской волны на упругий угол возникают дифрагированные волны D_0 и D_L , а также волны C_1 и C_2 , которые бегут по границе и распространяются в жидкой среде под критическим углом. В этом случае присутствуют три типа волн с различными скоростями: продольная и поперечная волны в упругом клине и акустическая звуковая волна в жидкости. Кроме того, вдоль грани клина возможно распространение двух типов поверхностных волн. Во-первых, волны Шотта-Стоунли, бегущей по границе жидкость-твердое тело. Во-вторых, волны Рэлея, распространяющейся по свободной границе, однако, такая волна здесь исчезает, из-за

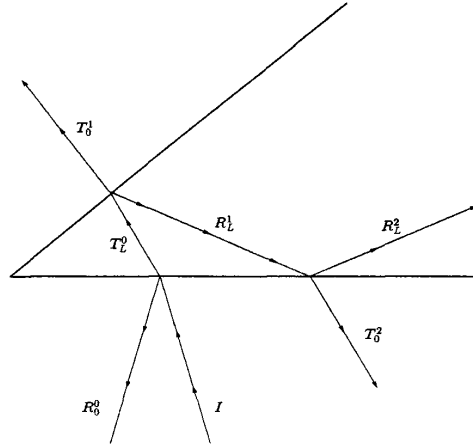


Рис. 14. Падающая плоская волна I , отраженная плоская волна $R_{L,0}^i$, проходящая плоская волна $T_{L,0}^i$. Индексы L соответствуют упругим волнам, индексы 0 — акустическим [27].

наличия жидкости (рис. 14, 15). За время t_0 на рисунке 15 принимают момент времени касания вершины угла падающей волной.

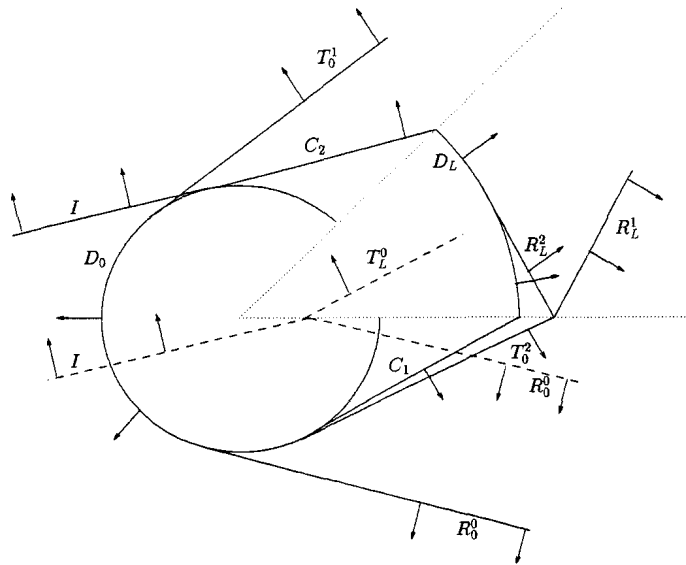


Рис. 15. Волновые фронты для моментов времени $-t_0 < 0$ (пунктирная линия) и в момент времени $4t_0 > 0$ (непрерывная линия) [27].

Скалярная задача о падении плоской волны на прозрачный клин была рассмотрена в работе [28], [29], в которой использовалась методика близкая к методике французских математиков Лебо и Круазелья.

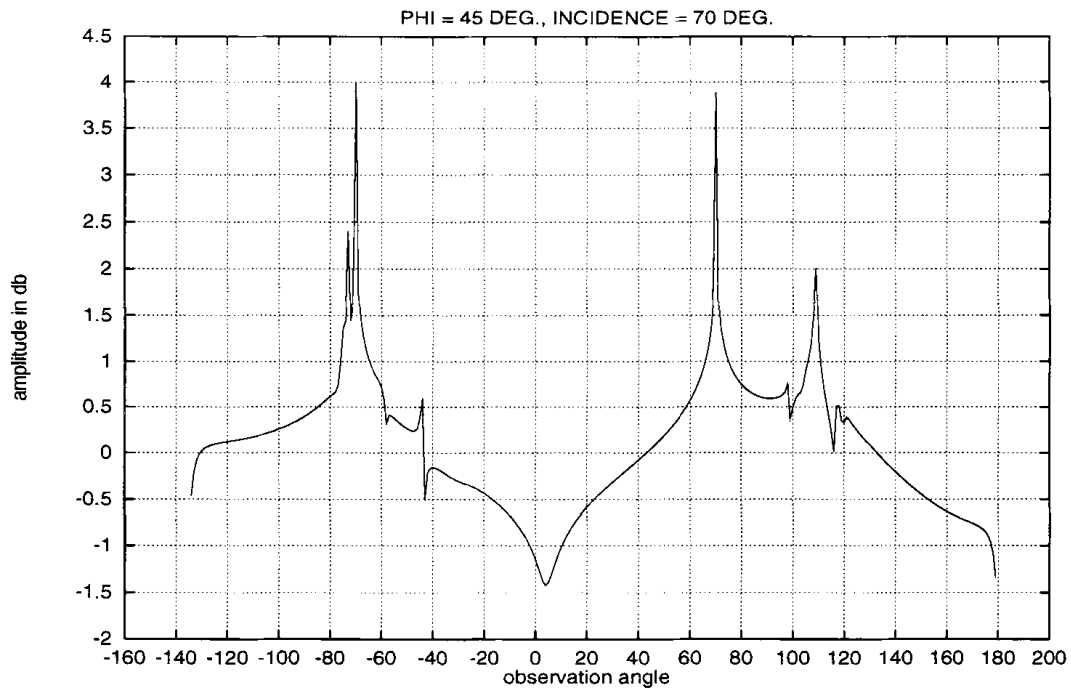


Рис. 16. График зависимости амплитуды дифрагированной волны при падении плоской волны под углом 70° на погруженный в воду дюралевый клин (угол раствора клина 45°) [27].

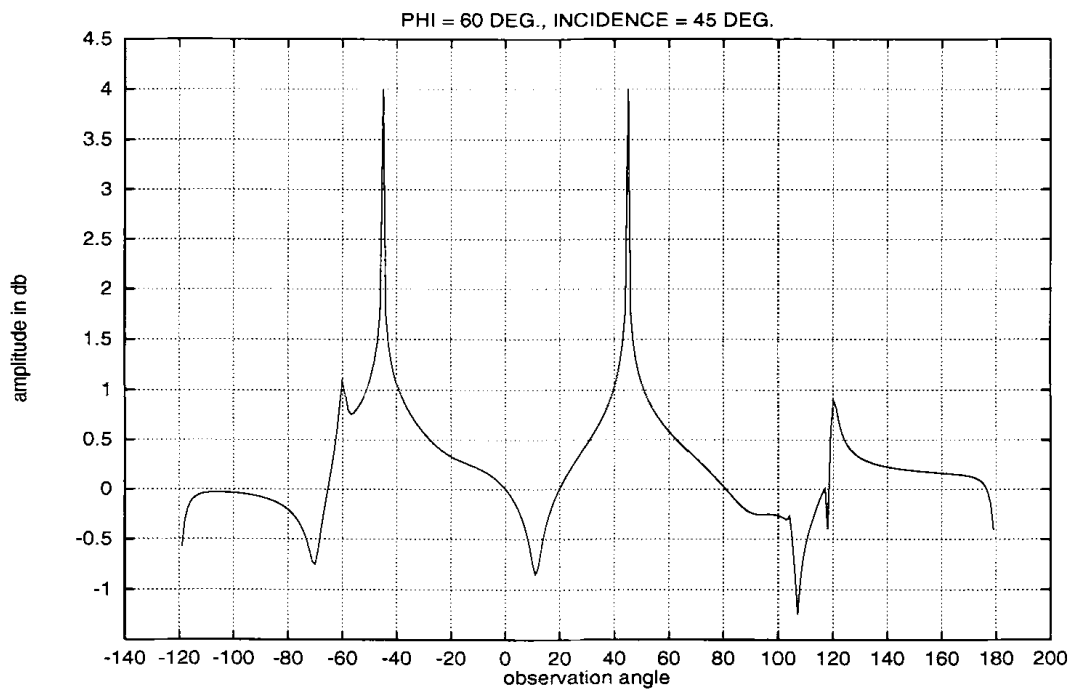


Рис. 17. График зависимости амплитуды дифрагированной волны при падении плоской волны под углом 45° на погруженный в воду дюралевый клин (угол раствора клина 60°) [27].

Поля дифрагированных волн в акустических средах

Кинематический анализ дифрагированных волн

Рассмотрим распространение поля давления в двумерной акустической среде (рис. 18). Введем прямоугольную систему координат (x, z) , начало которой совместим с местом расположения источника, обозначенного точкой S . Из точки D , с координатами $(600, 1000)$, выходят два луча, образующие угол 90° и являющиеся границами раздела двух сред I и II . Скорость в первой среде V_1 составляет 3300 м/с, скорость во второй среде $V_2 = 4300$ м/с, плотность как в первой, так и во второй средах $\rho = 1$ кг/м³.

Распространение поля давления $p(\mathbf{r}, t)$ в акустической среде с постоянной плотностью описывается неоднородным волновым уравнением:

$$\Delta p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{V(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t), \quad (48)$$

где $f(\mathbf{r}, t)$ — функция источника. Механическая модель источника используемая в задаче — центр расширения. Такой источник моделирует взрыв, излучающий продольную волну равномерно во всех направлениях. Поперечную волну такой источник не излучает. Математически, такую модель в двумерном случае можно представить в виде наложения четырех сосредоточенных сил, одинаковых по величине и действующих вдоль координатных осей в противоположных направлениях [12].

Согласно формуле (40) из главы 1 решением двумерного волнового уравнения (11) является цилиндрическая волна, фронт которой представляет собой цилиндрическую поверхность. Волну, возбуждаемую источником типа центра расширения можно представить в виде лучей, выходящих из точки S равномерно во всех направлениях. С учетом геометрии задачи (рис. 18), некоторые из этих лучей достигнут границы раздела двух сред, а некоторые будут беспрепятственно распространяться в среде I . Последние из упомянутых лучей не представляют большого интереса. Сосредоточимся на лучах, потенциальных к контакту с границей (рис. 19).

Предположим, что угол выхода лучей α из точки S , которые возможно достигнут к определенному моменту времени границы, изменяется от -90° до 90° . Угол будем отсчитывать от линии, направленной вертикально вниз из точки S . Также для дальнейшего объяснения необходимо ввести критический угол падения $\alpha_c = \arcsin \frac{V_1}{V_2} \approx 50^\circ$. Перечислим для данной задачи все возможные случаи:

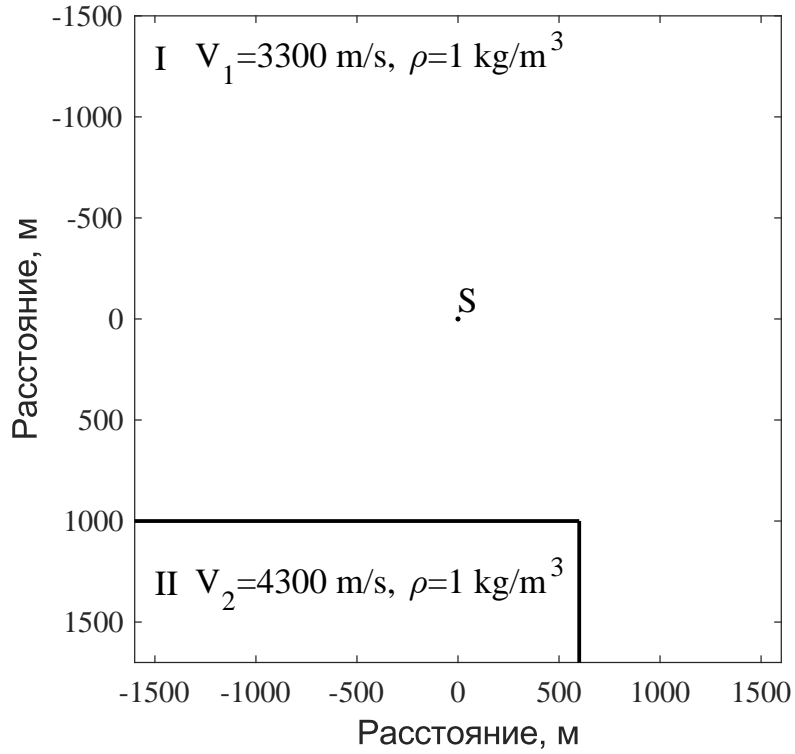


Рис. 18. Геометрические и физические параметры двумерной акустической среды

- 1 Если $-90 < \alpha < -\alpha_c$, то при достижении лучами горизонтальной части границы образуются только такие лучи, которые соответствующие полному внутреннему отражению.
- 2 Если $\alpha = -\alpha_c$, то при падении луча на горизонтальную часть границы образуются критически отраженный луч и критически преломленный луч, который будет скользить со скоростью V_2 по границе раздела двух сред. При этом из каждой точки границы будут выходить под критическим углом в первую среду лучи, соответствующие головной волне.
- 3 Если $-\alpha_c < \alpha < 0$, то при достижении лучей горизонтальной части границы образуются отраженный луч MK и преломленный луч ML , которые связаны между собой законом Снелиуса (рис. 19а)
- 4 Если $\alpha = 0$, то падение, преломление и отражение упругих волн происходит по нормальным лучам $\alpha = \alpha_R = \alpha_T = 0$.

Перечисленные четыре пункта описывают поведение лучей цилиндрической волны слева от источника. Для описания поведения лучей справа от источника необходимо ввести еще два дополнительных угла.

Первый из них обозначим β (рис. 19б). Существует такой угол падения β луча SM , при котором за определенный промежуток времени T преломленный луч ML успевает достигнуть вертикальной границы, но не испытывает на этой границе преломления и отражения. Угол β

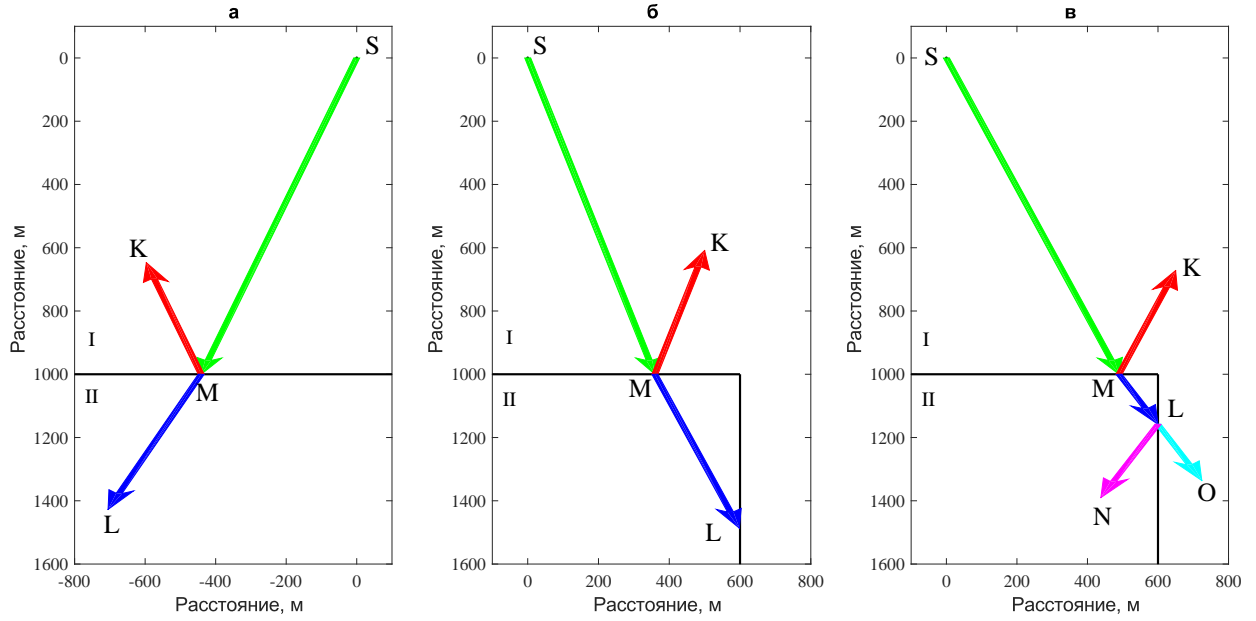


Рис. 19. Ход лучей при углах падения: $-\alpha_c < \alpha < 0$ (а); $\alpha = \beta$ (б); $\beta < \alpha < \alpha_d$ (в)

определяется по следующей формуле

$$x \left(H \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \right) \right) - l + \left(\frac{V_2^2}{V_1} T \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 0, \quad (49)$$

где $x = \tan \beta$, T — момент времени наблюдения, H — расстояние от источника S до горизонтальной границы, l — расстояние от точки N до D (рис. 18), V_1 , V_2 — скорости в первой и во второй средах (рис. 18). Вывод формулы представлен в Приложении 3.

При заданных в обсуждаемой задаче параметрах — расположение источника и геометрии границы — в момент времени $T = 0.448$ с уравнение (49) выглядит следующим образом:

$$x \left(1000 \left(1 - \frac{4300^2}{3300^2} \right) \right) - 600 + \left(\frac{4300^2}{3300} 0.448 \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 0. \quad (50)$$

Решением данного уравнения являются три корня

$$x_1 = -0.1889, \quad x_2 = 0.3580, \quad x_3 = 2.4935, \quad (51)$$

учитывая, что $\beta = \arctan x$ получаем значения углов:

$$\beta_1 = -10.7000, \quad \beta_2 = 19.6978, \quad \beta_3 = 68.1471. \quad (52)$$

С учетом геометрии задачи и способа отсчета угла выбирается корень, соответствующий $\beta_2 = 19.6978 = \beta$.

Второй угол соответствует такому углу выхода, при котором падающий луч попадает в точку D . Обозначим такой угол как α_d . Его можно легко найти по формуле

$$\alpha_d = \arctan \frac{l}{H}, \quad (53)$$

где H — расстояние от источника S до горизонтальной границы, l — расстояние от точки N до D (рис. 18). Подставляя в предыдущую формулу параметры нашей задачи $l = 600$ м и $H = 1000$ м, определим величину угла $\alpha_d \approx 31^\circ$. Отметим также, что $\beta < \alpha_c$ и $\alpha_d < \alpha_c$.

Перейдем к следующему случаю.

- 5 Если $0 < \alpha < \beta$, то при достижении лучей горизонтальной части границы образуются отраженные и преломленные лучи. На рис. 19б изображен предельный случай, когда угол падения α луча SM равен β , при этом преломленный луч ML достигает вертикальной части границы.
- 6 Если $\beta < \alpha < \alpha_d$, то при падении на горизонтальную часть границы образуется отраженный луч MK , преломленный луч ML , дважды преломленный (преломленный преломленный) луч LO и преломленный отраженный луч LN (рис. 19в).
- 7 Если $\alpha = \alpha_d$, то падающий луч попадает на вершину угла, точку D и образуется дифрагированная волна. В связи с этим точку D будем также называть точкой дифракции. Фронт дифрагированной волны будет цилиндрическим.
- 8 Если $\alpha_d < \alpha < 90$, падающий луч не встречает границы раздела и свободно распространяется в первой среде.

Остановимся подробнее на седьмом пункте. В рассматриваемой задаче, объект на котором дифрагирует волна представляет собой дифрагирующее ребро. Дифрагированные на ребрах волны также называют краевыми. Волны, которые дифрагируют на гладких препятствиях называют волнами соскальзывания.

Согласно принципу Гюйгенса, при достижении фронтом падающей волны точки дифракции, эта точка становится источником новой волны. В трехмерном случае при произвольном падении плоской волны на ребро фронт краевой волны представляет собой конус, а при падении на острие — сферу. Подробно эти случаи были описаны в главе 2. В рассматриваемом двумерном случае фронт дифрагированной волны является цилиндрическим.

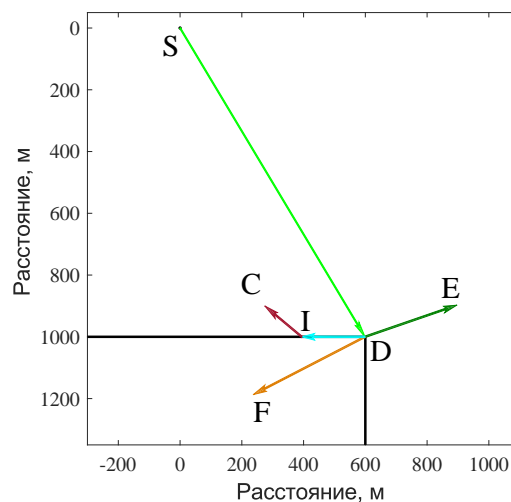


Рис. 20. Ход лучей при угле падения $\alpha = \alpha_d$

На рис. 20 изображены только некоторые из лучей дифрагированной волны. Луч DE распространяется в первой среде со скоростью V_1 , луч DF — во второй, со скоростью V_2 . Поскольку дифрагированная волна распространяется равномерно во всех направлениях, то будут и такие лучи, которые побегут вдоль границы. Так, луч DI скользит по границе раздела двух сред ($v_1 < v_2$), и в каждой точке излучает в первую среду под критическим углом лучи IC . Эти волны имеют плоский фронт и кинематически сходны с головными [6]. Дифрагированную волну такого типа будем называть “головной” дифрагированной волной.

На рис. 21 представлена кинематическая картина волновых полей, распространяющихся в среде (рис. 18) в момент времени $t = 0.448$ с. В этот момент времени угол выхода луча из источника меньше критического.

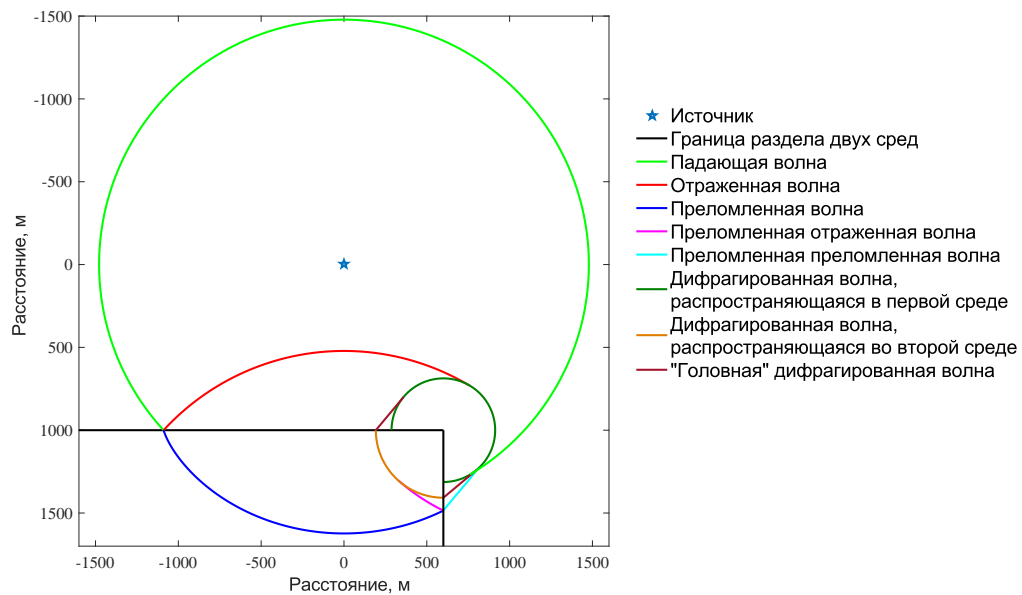


Рис. 21. Волновые поля в момент времени $t = 0.448$ с.

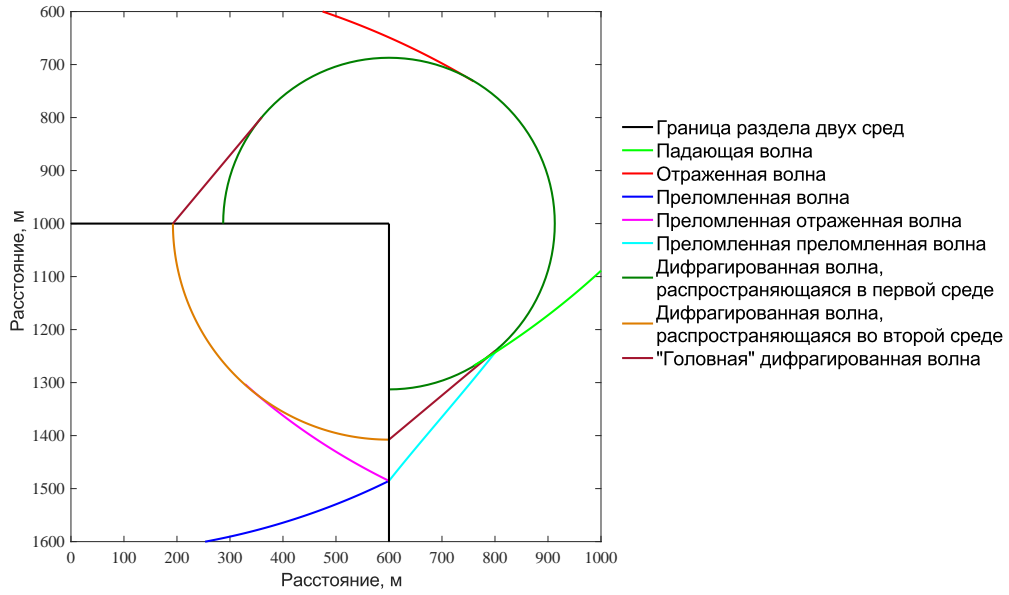


Рис. 22. Увеличенный фрагмент рис. 21

Согласно рис. 22 фронт дифрагированной волны касается фронтов падающей волны, отраженной, преломленной отраженной и преломленной преломленной волн. Точки касания фронта дифрагированной волны с фронтами отраженной и преломленной отраженной различимы достаточно отчетливо. Точки касания фронта дифрагированной волны с фронтами падающей волны и преломленной преломленной волны расположены очень близко друг к другу, в следствии чего являются трудно различимыми. Очевидно, что такое расположение точек касания во многом связано с выбранной геометрией задачи: вид дифрагирующего объекта (прямой угол) и местоположение источника относительно дифрагирующего объекта, типом падающей волны (цилиндрическая).

Исследования кинематических свойств дифрагированных волн происходило не только посредством построения кинематических картин волновых полей, но также и посредством анализа результатов численного моделирования. Для моделирования волнового поля, удовлетворяющего уравнению (48), использовался псевдоспектральный метод Фурье. Описание данного метода приводится в публикациях [30], [31].

Результаты численного эксперимента представлены на рисунках 23 — 27. Скорость в среде, в которой расположен источник, составляет $v_1 = 3300$ м/с. Скорость во второй среде — $v_2 = 4300$ м/с. Граница раздела двух сред на всех рисунках изображена черной линией и является сторонами угла в 90° . Плотность во всем пространстве составляет $\rho = 1$ кг/м³. Источник, обозначенный буквой S , во всех случаях погружен на одну и ту же глубину 6800 м. Горизонтальная координата месторасположения источника изменяется в пределах от 5300 м до 6300 м. При моделировании использовался источник типа центра расширения. Функция источника — дельта функция. Волновые поля, изображенные на рисунках 23 — 27 представлены в момент времени наблюдения $t = 0.8$ с. Координаты вершины угла (точка дифракции) — (6300, 7800). Во всех случаях, величина угла α_d меньше критического угла $\alpha_c = \arcsin \frac{v_1}{v_2} = \arcsin \frac{3300}{4300} \approx 51^\circ$,

т.е. луч, падающий на точку дифракции является докритическим. В случае, когда $\alpha_d > \alpha_c$, т.е. луч падающий на точку дифракции является закритическим, наблюдается процесс дифракции головной волны, после чего происходит процесс дифракции закритически-падающего луча.

Анализируя результаты численного моделирования можно сделать следующие выводы:

1. Фаза дифрагированной волны изменяется на π в точке касания фронта дифрагированной волны с фронтами отраженной, преломленной, преломленной отраженной и преломленной преломленной волнами.

2. При приближении горизонтальной координаты источника к горизонтальной координате угла, фронт дифрагированной волны $D2$, распространяющейся во второй среде, накладывается на фронт преломленной отраженной волны TR . Такое наложение волновых фронтов характерно для рассматриваемой модели угла. Таким образом, геометрия волновых фронтов зависит от геометрии модели и месторасположения источника.

3. Амплитуда дифрагированной волны максимальна в окрестности точки касания волнового фронта дифрагированной волны и фронта волн I , R , TR и TT , и быстро затухает при удалении от этой точки.

4. Существуют “головные” дифрагированные волны, распространяющиеся вдоль границ раздела двух сред. При этом, та волна, которая распространяется вдоль вертикальной границы, на данных снимках волнового поля в силу суперпозиции с геометросейсмическими полями слабо выражена.

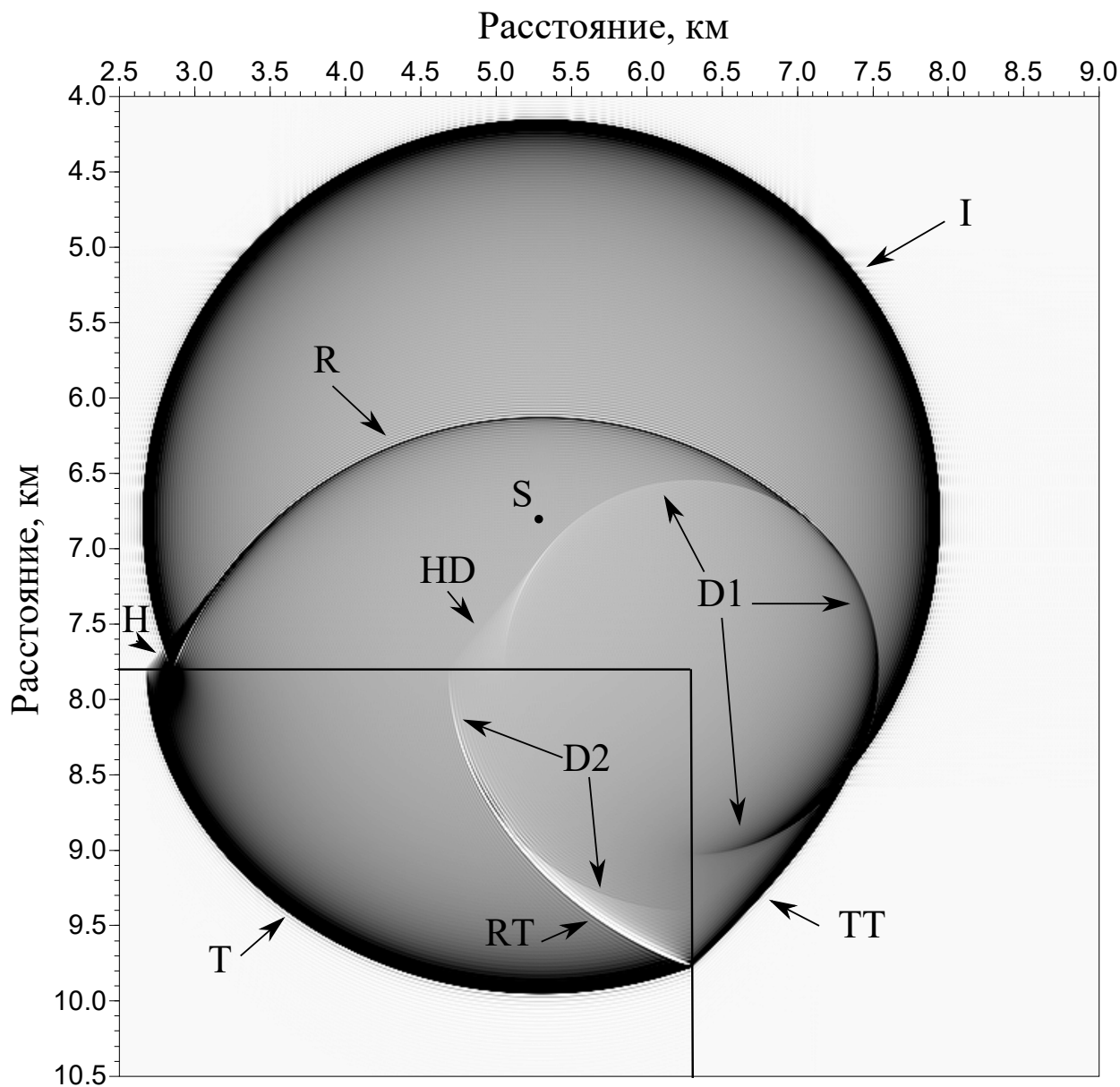


Рис. 23. Черная линия обозначает границу двух сред. Внутри угла скорость составляет $V_2 = 4300$ м/с, снаружи — $V_1 = 3300$ м/с. Координаты источника S — (5300, 6800) м. Угол $\alpha_d = 45 < \alpha_c \approx 51$. Волновые поля: I — падающая волна, R — отраженная волна, T — преломленная волна, H — голоная волна, RT — преломленная отраженная волна, TT — преломленная преломленная волна, $D1$ — дифрагированная волна, распространяющаяся в первой среде, $D2$ — дифрагированная волна, распространяющаяся во второй среде, HD — “головная” дифрагированная волна.

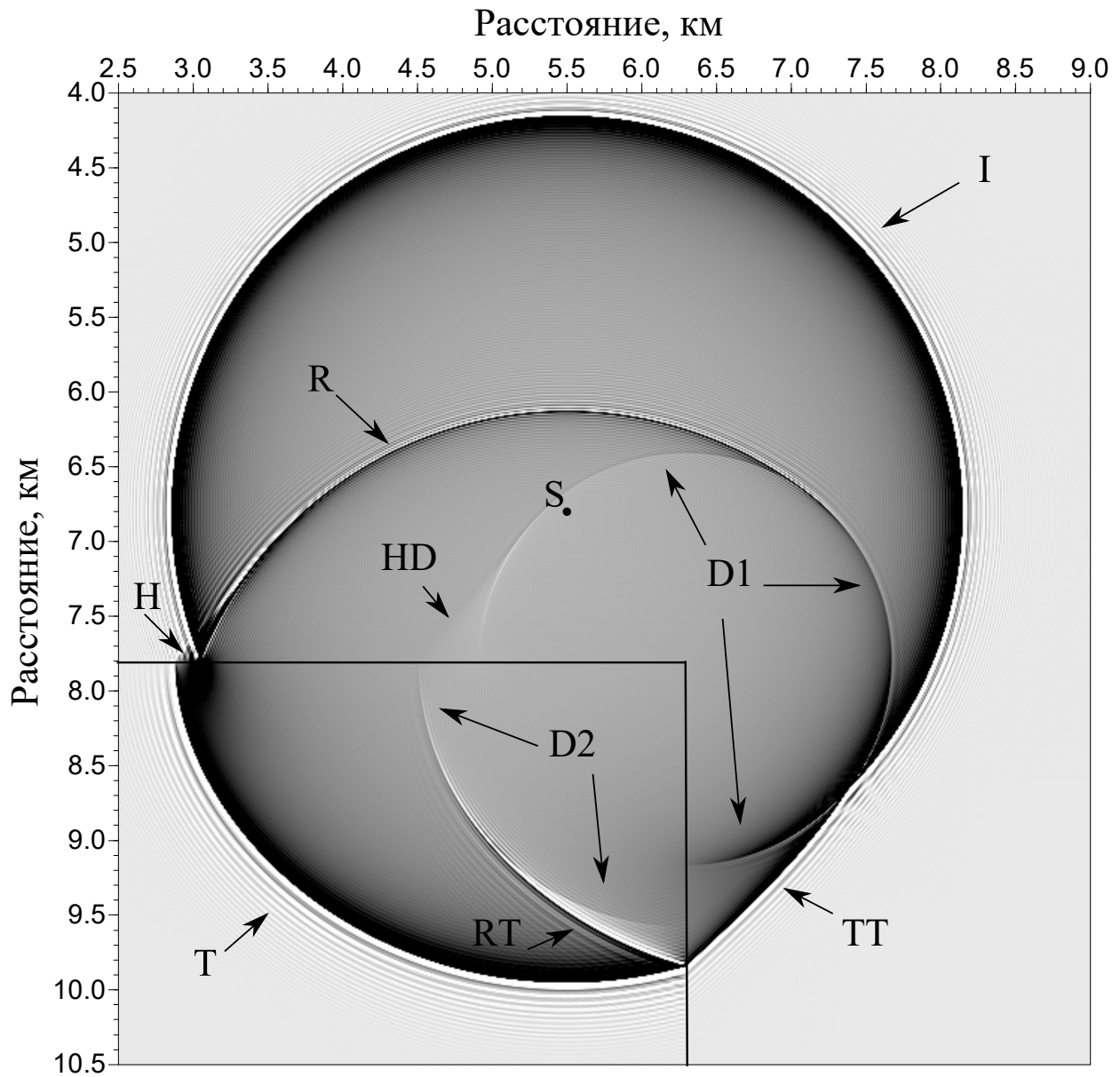


Рис. 24. Черная линия обозначает границу двух сред. Внутри угла скорость составляет $V_2 = 4300$ м/с, снаружи — $V_1 = 3300$ м/с. Координаты источника S — (5500, 6800) м. Угол падения $\alpha_d \approx 39 < \alpha_c \approx 51$. Волновые поля: I — падающая волна, R — отраженная волна, T — преломленная волна, H — голоная волна, RT — преломленная отраженная волна, TT — преломленная преломленная волна, $D1$ — дифрагированная волна, распространяющаяся в первой среде, $D2$ — дифрагированная волна, распространяющаяся во второй среде, HD — “головная” дифрагированная волна.

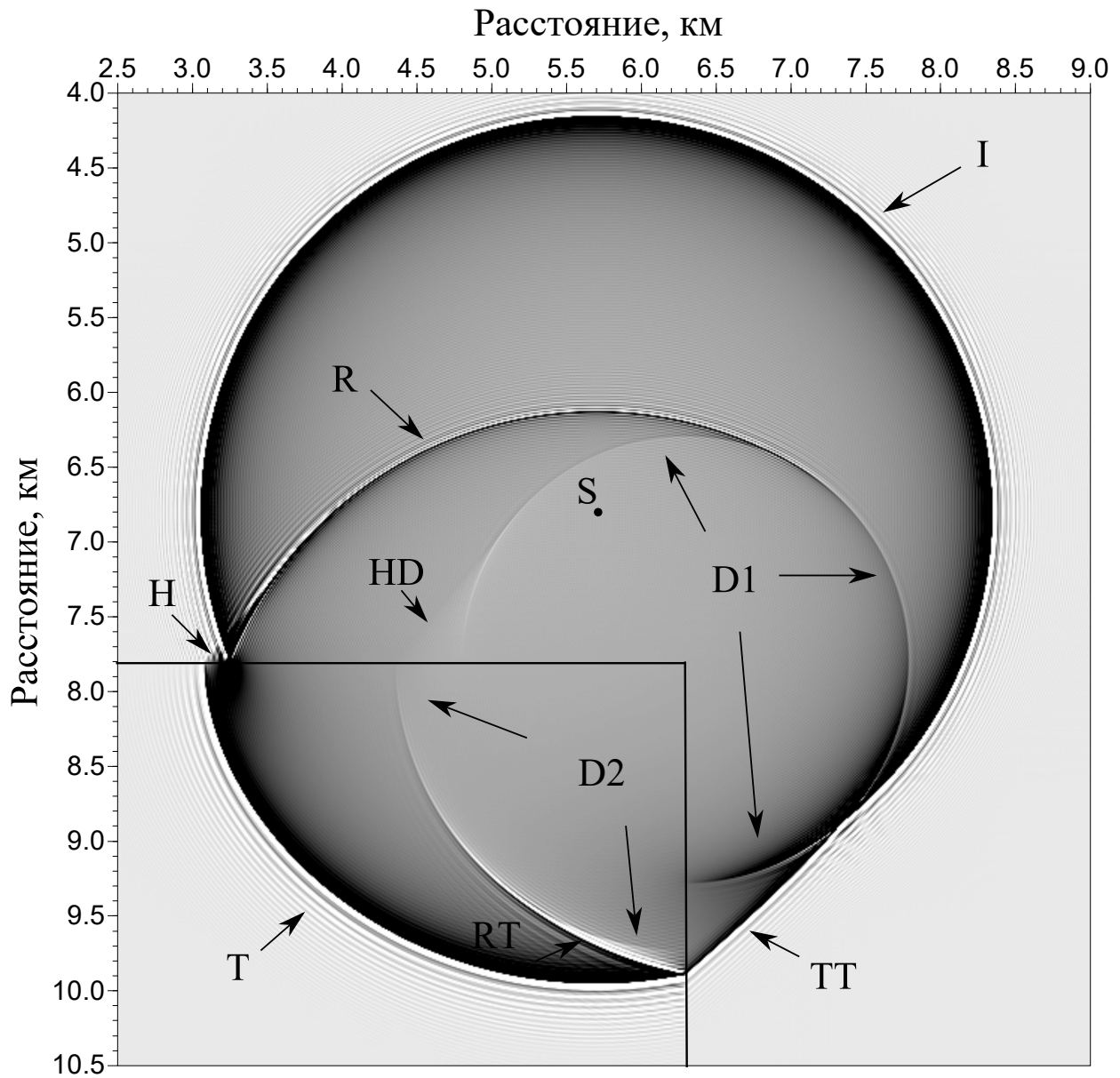


Рис. 25. Черная линия обозначает границу двух сред. Внутри угла скорость составляет $V_2 = 4300$ м/с, снаружи — $V_1 = 3300$ м/с. Координаты источника S — (5700, 6800) м. Угол падения $\alpha_d \approx 31 < \alpha_c \approx 51$. Волновые поля: I — падающая волна, R — отраженная волна, T — преломленная волна, H — голоная волна, RT — преломленная отраженная волна, TT — преломленная преломленная волна, $D1$ — дифрагированная волна, распространяющаяся в первой среде, $D2$ — дифрагированная волна, распространяющаяся во второй среде, HD — “головная” дифрагированная волна.

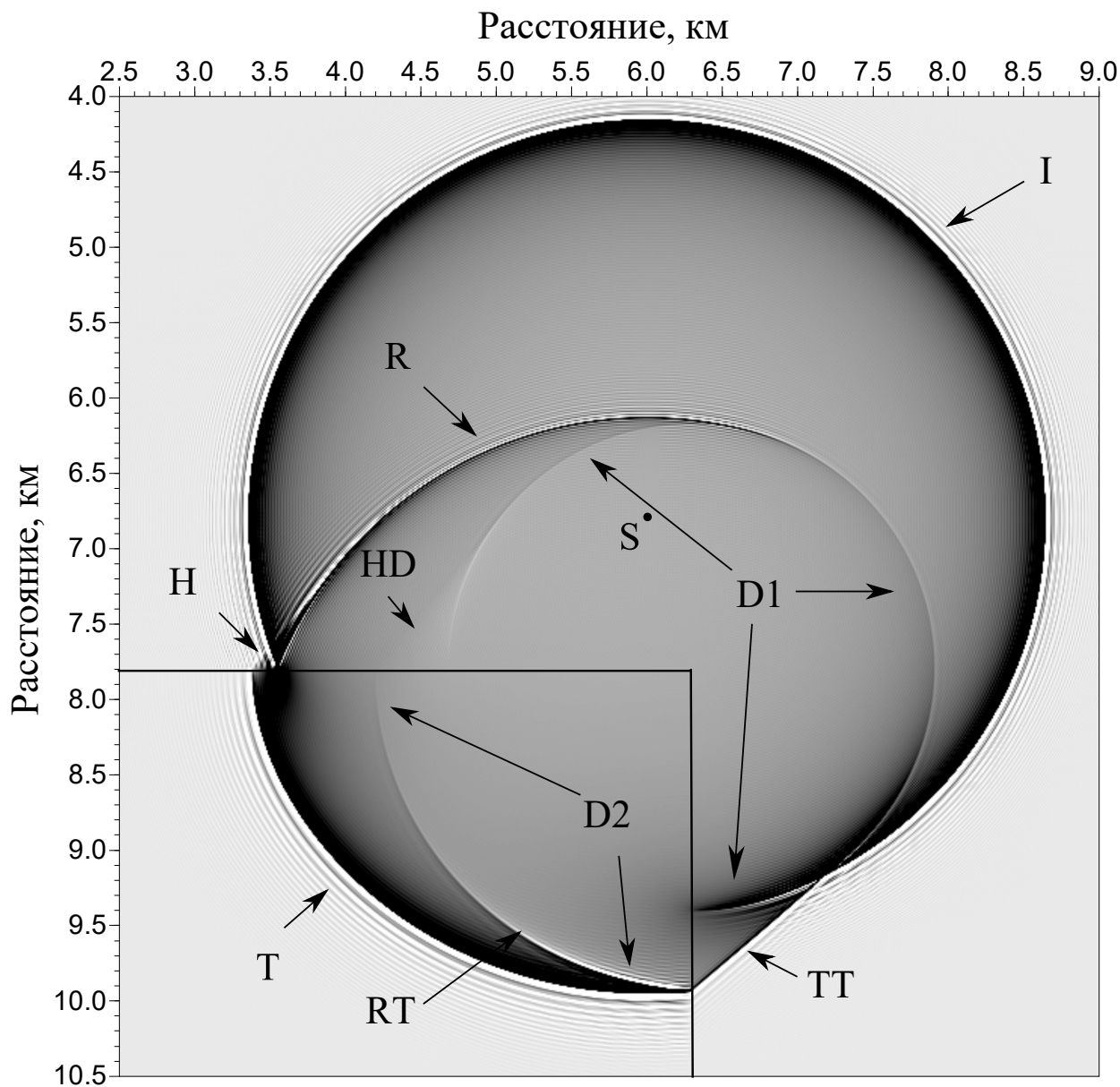


Рис. 26. Черная линия обозначает границу двух сред. Внутри угла скорость составляет $V_2 = 4300$ м/с, снаружи — $V_1 = 3300$ м/с. Координаты источника S — (6000, 6800) м. Угол падения $\alpha_d \approx 17 < \alpha_c \approx 51$. Волновые поля: I — падающая волна, R — отраженная волна, T — преломленная волна, H — голоная волна, RT — преломленная отраженная волна, TT — преломленная преломленная волна, $D1$ — дифрагированная волна, распространяющаяся в первой среде, $D2$ — дифрагированная волна, распространяющаяся во второй среде, HD — “головная” дифрагированная волна.

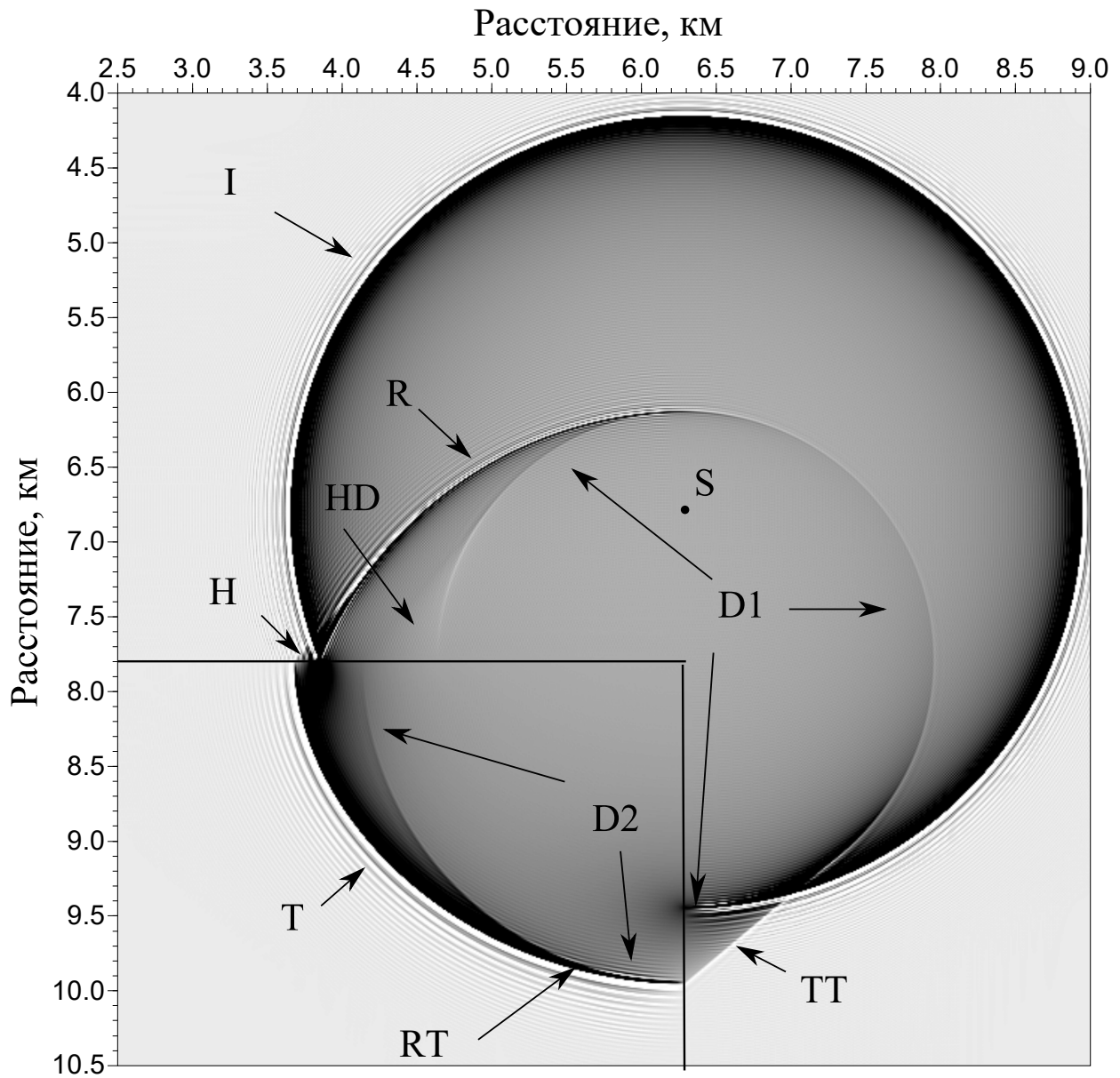


Рис. 27. Черная линия обозначает границу двух сред. Внутри угла скорость составляет $V_2 = 4300$ м/с, снаружи — $V_1 = 3300$ м/с. Координаты источника S — (6300, 6800) м. Угол падения $\alpha_d = 0 < \alpha_c$. Волновые поля: I — падающая волна, R — отраженная волна, T — преломленная волна, H — голоная волна, RT — преломленная отраженная волна, TT — преломленная преломленная волна, $D1$ — дифрагированная волна, распространяющаяся в первой среде, $D2$ — дифрагированная волна, распространяющаяся во второй среде, HD — “головная” дифрагированная волна.

Амплитудный анализ дифрагированных волн

Амплитудный анализ дифрагированных волн был выполнен для поля давления, распространяющегося в двумерной акустической среде (на рис. 28). Введем прямоугольную систему координат (x, z) . Из точки D , с координатами $(890, 1100)$, выходят два луча, образующие угол 90° и являющиеся границами раздела двух сред I и II . Скорость в первой среде V_1 составляет 2200 м/с, скорость во второй среде V_2 — 3200 м/с, плотность как в первой, так и во второй средах $\rho = 1$ кг/м³. В точке $(630, 780)$, расположен источник типа центра расширения. Функция источника $f(\mathbf{r}, t)$ — импульс Рикера. Распространение поля давления $p(\mathbf{r}, t)$ в акустической среде с постоянной плотностью описывается неоднородным волновым уравнением:

$$\Delta p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{V(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t), \quad (54)$$

где $f(\mathbf{r}, t)$ — функция источника, в качестве которой был выбран вейвлет Рикета с центральной частотой $f = 100$ Гц, при этом максимальная частота сигнала составляла $f = 200$ Гц. Зная значения скоростей, характеризующих среду, можно рассчитать минимальную длину волны $\lambda_{min} = \frac{V_{min}}{f_{max}} = \frac{2200}{200}$ м = 11 м.

Численное моделирование также осуществлялось псевдоспектральным методом Фурье [30], [31]. При моделировании использовался шаг сетки d равный 1 м, что удовлетворяет соотношению $\frac{\lambda_{min}}{d} > 10$ (более десяти точек на длину волны). Угол $\alpha_d \approx 39^\circ < \alpha_c \approx 45^\circ$. На рис. 29 представлен результат наложения кинематической картины волнового поля на результат численного моделирования.

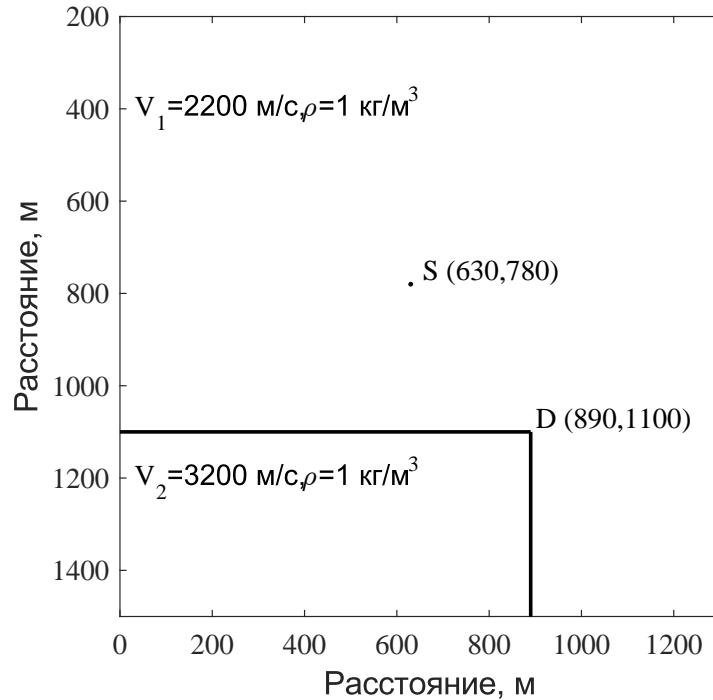


Рис. 28. Геометрические и физические параметры двумерной акустической среды.

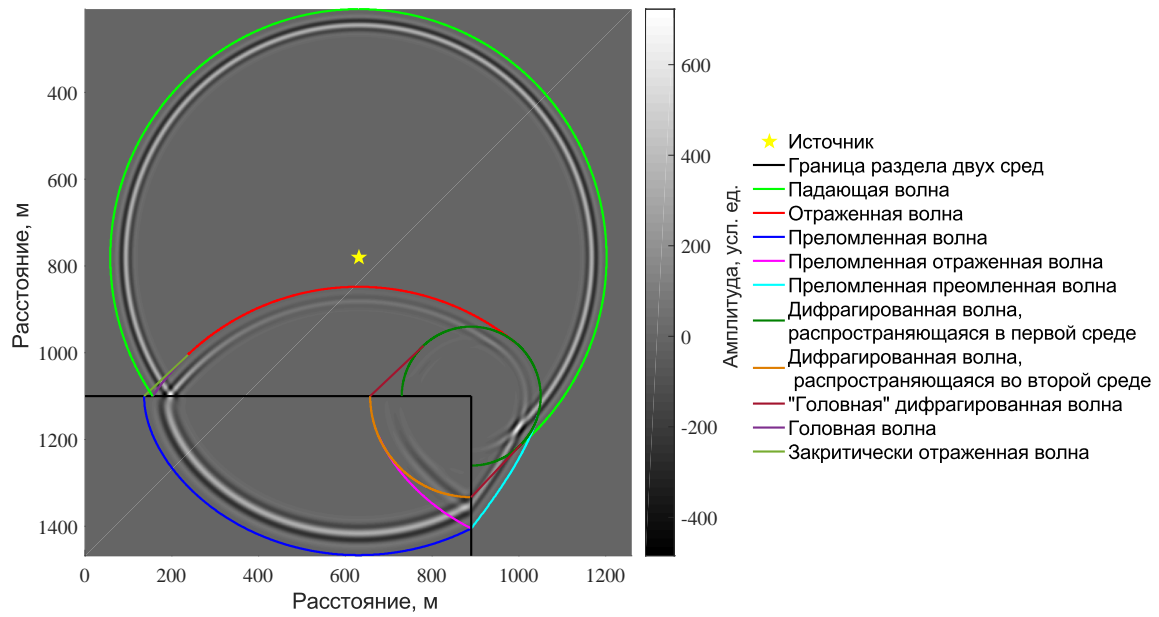


Рис. 29. Волновые поля в момент времени $t = 0.26$ с.

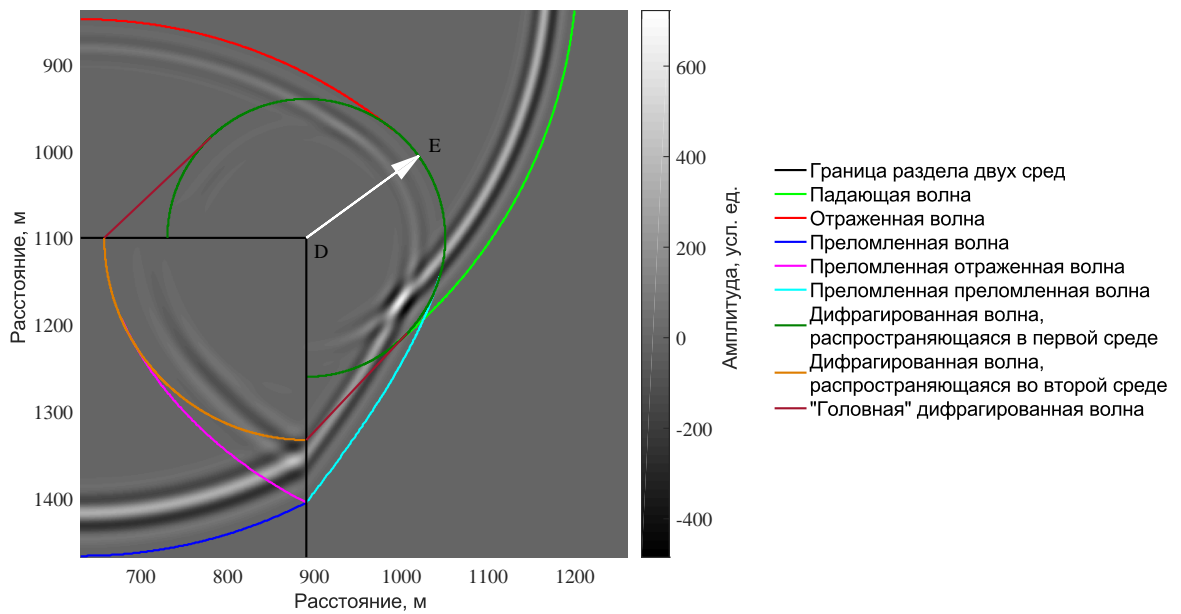


Рис. 30. Увеличенный фрагмент рисунка 29

Для построения графика зависимости величины амплитуды волнового фронта в момент времени $t = 0.26$ с вдоль линии, обозначающей положение фронта дифрагированной волны, были выполнены следующие операции:

- Построение лучей дифрагированных волн. Необходимо провести отрезок из точки дифракции D (рис. 28) до точки на линии, соответствующей положению волнового фронта дифрагированной волны в фиксированный момент времени. Каждая точка на этой линии соответствует определенному углу выхода луча из точки D . Будем отсчитывать угол

выхода дифрагированных лучей от линии, направленной вертикально вниз из точки источника. На рис. 30 изображен луч DE дифрагированной волны, выходящий под углом $\theta \approx 143$.

- Определение величины амплитуды волнового поля вдоль луча. Результатом численного моделирования волного поля является трехмерная матрица, размером (nx, nz, nt) , где nx, nz — пространственные размеры сетки моделирования, nt — количество моментов времени, для которых рассчитываются амплитуды волнового поля. Зафиксировав момент времени t , получаем матрицу W , размером (nx, nz) . Очевидно, что каждая точка луча имеет свои пространственные координаты (x_l, z_l) . Элемент матрицы $W(x_l, z_l)$ соответствует величине амплитуды поля на луче в точке (x_l, z_l) . Результат поиска амплитуды для каждой точки луча DE (рис. 30) по матрице W таким способом, представлен на рис. 31.

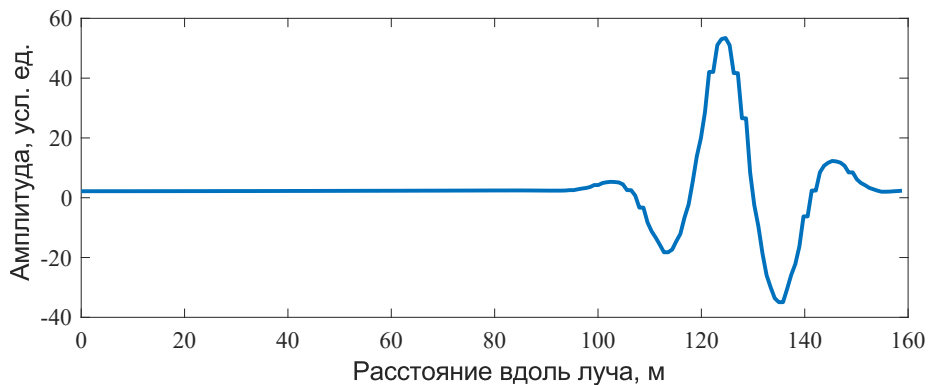


Рис. 31. Распределение амплитуды вдоль луча DE , изображенного на рис. 30.

- Определение максимальной амплитуды сигнала. Применялось преобразование Гильберта, модуль которого позволяет определить огибающую сигнала. За величину максимальной амплитуды сигнала принималась максимальная величина амплитуды огибающей сигнала.
- Повторить перечисленные пункты для всех углов выхода $\theta \in (0^\circ; 360^\circ)$.

Таким образом, каждый луч характеризуется двумя параметрами: углом выхода θ и максимальным значением амплитуды. Прежде, чем перейти к полученному результату, обсудим особенности волнового фронта дифрагированной волны.

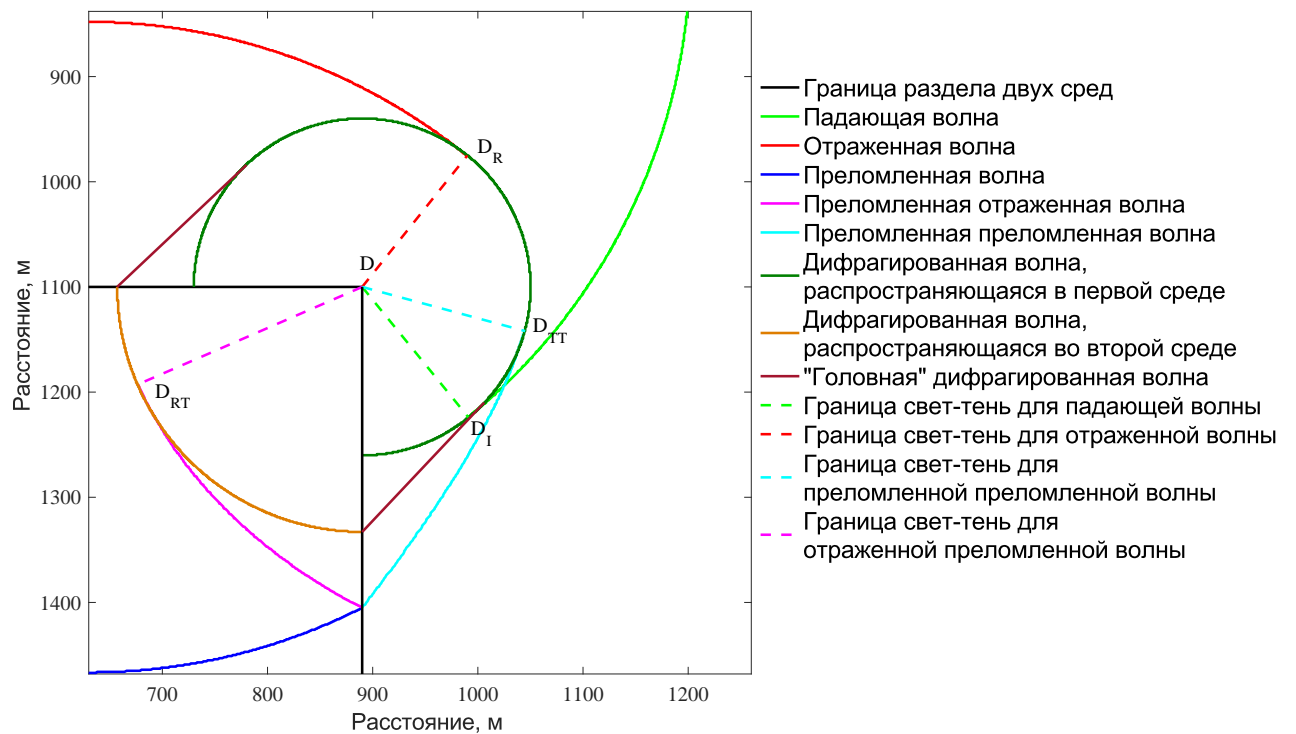


Рис. 32. Точки D_R , D_{TT} , D_I и D_{RT} обозначают точки касания фронта дифрагированной волны с фронтами отраженной, преломленной преломленной, падающей и преломленной отраженной волн, соответственно.

Величина амплитуды дифрагированной волны определяется из величины геометрического волнового поля. В связи с этим, амплитуда дифрагированной волны различна вдоль своего фронта, так как ее фронт касается четырех фронтов различных волн, величина амплитуды которых различна. Для иллюстрации этого утверждения выделим несколько областей (рис. 33). Внутри сектора, образованного горизонтальным отрезком границы, отрезком DD_1 и соответствующей дугой, существует фронты только дифрагированных волн (дифрагированная волна, распространяющаяся в первой среде, и "головная" дифрагированная волна). Внутри сектора D_1DD_R проявляется суперпозиция дифрагированной и отраженной волн. Внутри сектора D_3DD_2 волновая картина очень насыщенная, так как там проявляется суперпозиция дифрагированной волны, распространяющейся в первой среде, "головной" дифрагированной волны, падающей волны и преломленной преломленной волны. Внутри сектора, образованного вертикальным отрезком границы, отрезком DD_1 и соответствующей дугой, наблюдается наложение дифрагированной волны, распространяющейся во второй среде, и преломленной отраженной волны. И последний сектор, образованный отрезком DD_{RT} , горизонтальным отрезком границы и соответствующей дугой, содержит только дифрагированную волну, распространяющуюся во второй среде.

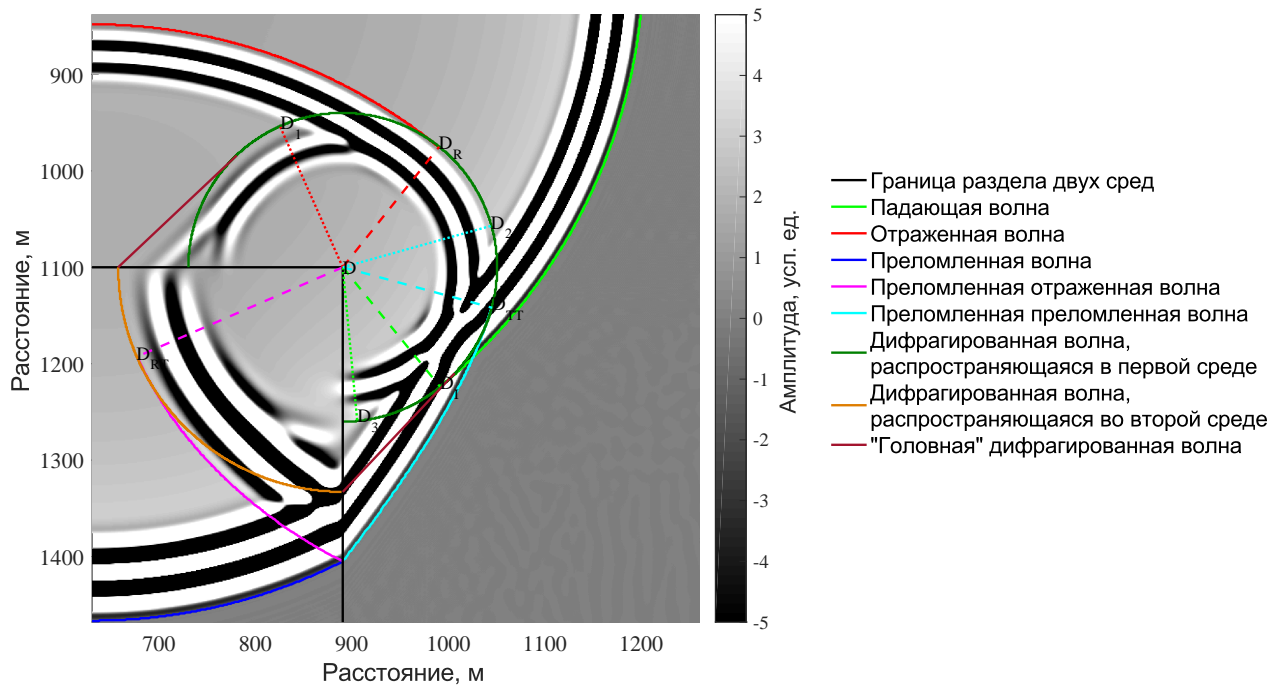


Рис. 33. Совмещение картины волнового фронта рис. 32 и результата численного моделирования. Дополнительные построения в виде отрезков DD_1 , DD_2 и DD_3 выделяют особенные области (описание в тексте).

Кроме того, сам характер поля дифрагированной волны различен вдоль ее волнового фронта. Объяснить в чем проявляется это различие и с чем оно связано можно при помощи лучевого метода. При смыкании геометрикооптических полей с дифрагированной волной неизбежно возникает переходная область. Ее наличие обусловлено тем, что вдоль границы свет-тень смыкаются два различных по своей лучевой структуре поля. На границах свет-тень у них совпадают направления лучей, но различаются радиусы кривизны фронтов. Следовательно, в приближении геометрической оптики должен образовываться разрыв амплитуд геометрикооптической и дифрагированной волн. На самом деле, его, конечно, нет, так как явление эффективной диффузии амплитуд дифрагированной волны устраняет этот разрыв. Иными словами, в окрестности границы свет-тень эффекты диффузии амплитуд уже нельзя считать малыми поправками к геометрикооптическому решению.

На рис. 32 отрезок DD_R определяет границу свет-тень для отраженной волны. Освещенной зоной считается зона, расположенная слева от отрезка DD_R , так как в этой зоне кроме дифрагированной присутствует отраженная волна. Справа от отрезка DD_R располагается зона, в которой нет отраженной волны, поэтому такую зону называют зоной тени для отраженной волны. Луч отраженной волны, совпадающий с лучом дифрагированной волны, исходящим из точки D в направлении точки D_R , является последним (или как его еще называют “крайним”) лучом отраженной волны. Аналогичные рассуждения можно провести и с отрезками DD_{TT} , DD_I и DD_{RT} , определяющими границы свет-тень для преломленной преломленной, падающей и преломленной отраженной волн.

На рис. 34 представлен график зависимости амплитуды волнового поля от угла θ в момент времени $t = 0.26$ с. В связи с тем, что фронт дифрагированной волны касается фронта геометрооптических полей, то на графике также присутствуют вклады от этих полей. Между началом координат графика и вертикальной прямой DD_1 представлена амплитуда дифрагированной волны, распространяющейся в первой среде, и “головной” дифрагированной волны. Локальный максимум, обозначенный цифрой 1, соответствует касанию волновых фронтов этих типов дифрагированных волн. Величина амплитуды в области между прямыми DD_1 и DD_R , является в каком-то смысле смешанной, так как здесь в распределение амплитуды по лучу вносит вклад также и отраженная волна. Этим объясняются и два резких локальных максимума 2 и 3. На участке между прямыми DD_R и DD_2 присутствует только дифрагированная волна, распространяющаяся в первой среде.

Полученное распределение амплитуды для случая падения цилиндрической волны на прозрачный акустический угол на качественном уровне совпадает с графиками амплитудных кривых, рассчитанных аналитически для случая падения плоской волны на упругий угол и опубликованных в работах [27], [28], [29]. Как и ожидалось, максимумы амплитуд связаны с точкам касания фронтов дифрагированной волны и геометрооптических волн, так как в окрестности этих точек происходит поперечная диффузия амплитуды. Получить такую зависимость амплитуды дифрагированной волны от угла падения отдельно от других типов волн пока не представляется возможным, так как динамическая теория дифракции для сферических волн еще не достаточно развита.

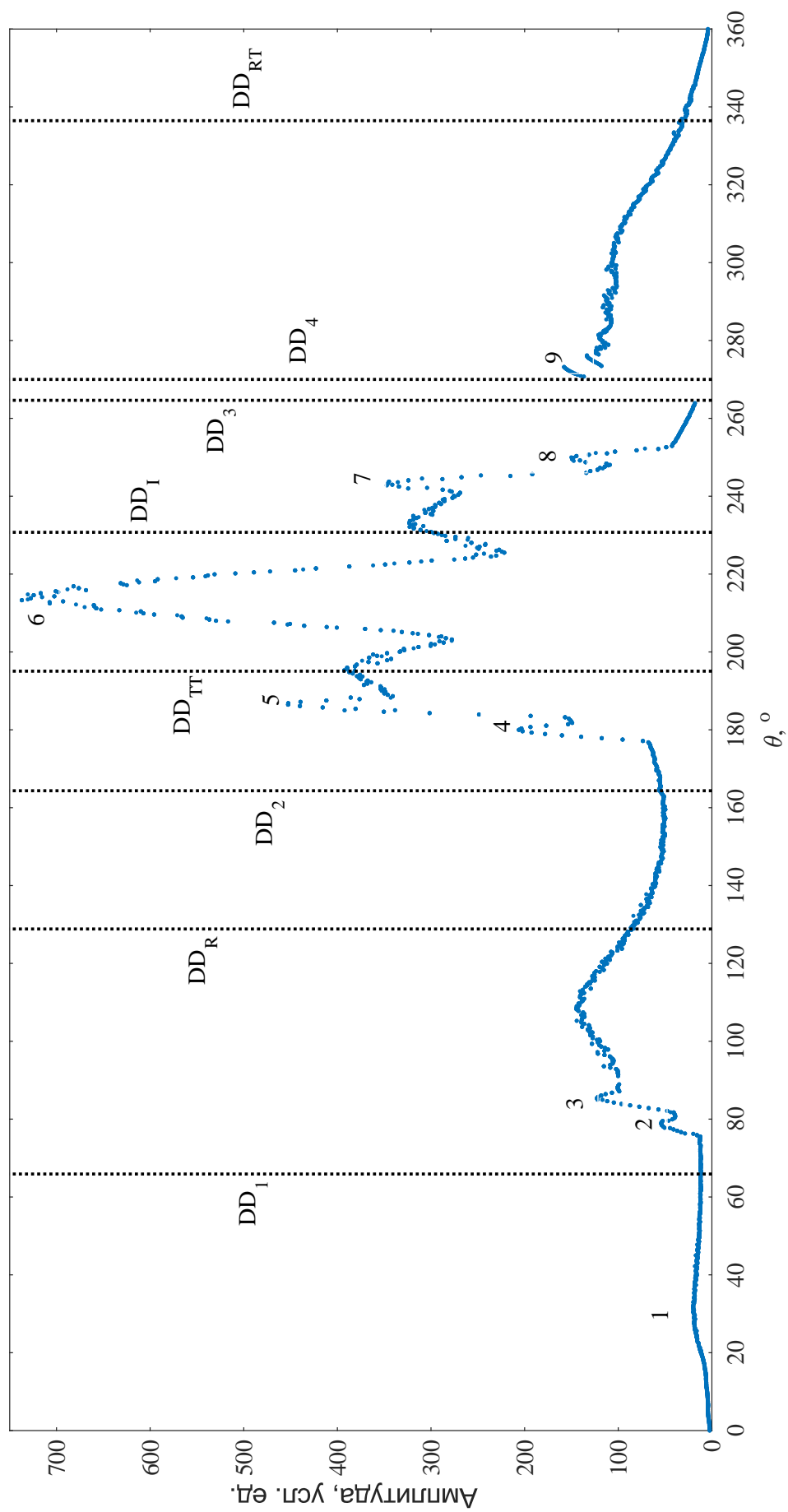


Рис. 34. Зависимости амплитуды волнового поля вдоль линии фронта дифрагированной волны. Прямые DD_1 , DD_R , DD_2 , DD_{TT} , DD_I , DD_3 , DD_4 , DD_{RT} разделяют график на области. Локальные максимумы 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 связаны с влиянием геометрического поля.

Применение дифрагированных волн для построения тонкослоистых сред при наличии разломов

Большинство методов обработки сейсмических данных основано на применении отраженных волн, использование которых, позволяет оценить скоростную модель и определить геометрию отражающих горизонтов [32]. Например, для построения суммированного сейсмического разреза вводятся кинематические поправки за нормальное время пробега отраженной волны. Такая процедура позволяет увеличить отношение сигнал/шум, где сигналом считается вклад отраженной волны в зарегистрированное сейсмическое поле, а шумом считаются вклады всех остальных зарегистрированных волн, в том числе и дифрагированных. Известно [33], что кинематические свойства дифрагированных волн сильно отличаются от кинематических свойств отраженных волн — различаются формы их годографов. В связи с этим, при введении кинематических поправок дифрагированные волны могут быть отфильтрованы.

Авторы статьи [34] утверждают, что классическое дифракционное суммирование (без введения весовых коэффициентов), осуществляемое в процессе временной или глубинной миграции, “дискриминирует” вклад дифрагированной волны. Данное утверждение может звучать немного запутанным из-за используемой терминологии. Для пояснения термина дифракционное суммирование обратимся к принципу Гюйгенса: фронт новой волны определяется как огибающая волн, распространяющихся от виртуальных точечных источников. Волны от таких источников могут интерферировать как конструктивно, так и деструктивно. Результатом конструктивной интерференции как раз и является фронт новой волны. Принцип Гюйгенса справедлив и для отраженной волны, являющейся огибающей элементарных дифрагированных волн, и для реальной дифрагированной волны.

Под элементарными дифрагированными волнами подразумевается математическая идеализация. При этом сами они (элементарные дифрагированные волны) наблюдаться не могут, за то могут наблюдаться их суперпозиция — волновое поле, отраженное от гладкого протяженного объекта. Под реальной дифрагированной волной подразумевается волновое поле, образовавшееся в результате рассеяния падающего волнового поля на малых объектах или на разрывах сейсмических границ. Такие дифрагированные волны возможно наблюдать на сейсмической записи.

Согласно приведенной в работе [35] классификации, дифрагирующие объекты могут быть

разделены на три типа: дифрагирующие ребра, шероховатые границы и локальные дифрагирующие тела. Примером геологических образований, содержащих дифрагирующие ребра, могут служить разрывные нарушения, выклинивающиеся слои, интрузии и соляные купола. К шероховатым относятся границы раздела содержащие выступы и впадины, а также границы геометрически гладкие, но с изменяющимся коэффициентом отражения вдоль них. Шероховатыми могут быть гофрированные границы в складчатых районах, а также границы рифов, соляных и рудных тел. К локальным дифрагирующим телам принадлежат небольшие по сравнению с длиной волны объекты примерно изометрической формы, отличные по своему вещественному составу от вмещающей их среды. Примером геологических образований, относящихся к этому типу, являются нефтегазовые залежи, карстовые воронки, небольшие рудные тела штокообразной, гнездообразной и других форм.

Определение правильного местоположения таких геологических элементов является важнейшей задачей при интерпретации сейсмических данных. Во время обработки полевых материалов локальные структуры и литологические элементы среды, размеры которых соизмеримы с длиной волны зондирующего сигнала, в большинстве случаев игнорируются [32]. И только в процессе интерпретации на них обращают внимание. Зачастую в процессе интерпретации очень сложно соотнести сейсмические отражающие горизонты с разломами, и когда результат бурения дорогостоящей разведочной скважины является неприятным сюрпризом, существуют тенденция полагать, что интерпретатор допустил ошибку [36]. В связи с этим при обработке данных необходимо использовать дифрагированные волны, так как сейсмический отклик от зон трещиноватости, резких краев разлома и других дифрагирующих объектах содержится именно в дифрагированной составляющей волнового поля.

Влияние дифрагированных волн на разрешающую способность сейсмического метода стало понятно сравнительно недавно [37], [38]. Первое использования дифрагированных волн для обнаружения и локализации разломов можно отнести к работам Татьяны Ивановны Облогиной и Камила Давыдовича Клем-Мусатова. Работы Т.И. Облогиной [35], [39], [40], [41], [42] посвящены исследованию кинематических и динамических свойств сейсмических дифрагированных волн. В этих работах ею были сформулированы основные свойства дифрагированных волн, которые могут быть использованы в процессе обработки данных. Максимальная величина амплитуды дифрагированной волны приурочена к точке касания фронтов отраженной и дифрагированной волн, и в обе стороны от этой точки амплитуда быстро затухает. Также в этой точке касания происходит изменение фазы дифрагированной волны на 180° . Еще одно свойство дифрагированных волн заключается в том, что дифрагированные волны имеют более низкочастотный спектр по сравнению с отраженными волнами. Авторы отмечают [43], что эффект переворота фазы, полученный теоретически и косвенно подтвержденный только в лабораторном эксперименте, является очень тонким эффектом, в связи с чем заранее трудно предопределить, насколько четко можно его выявить после суммирования полевых материалов по алгоритму общей глубинной точки.

Огромный вклад в развитие теории дифрагированных волн и их применение в сейсморазведке для решения прямых и обратных задач был сделан К. Д. Клем-Мусатовым. Его работы

посвящены динамическому описанию краевых и концевых волн в окрестностях границ геометрической тени (приближение дифракционного пограничного слоя). В этом приближении амплитуда дифрагированной волны получается путем простого умножения амплитуды исходной волны (падающей на границу, отраженной или преломленной) на специальную функцию, зависящую только от фазовых сдвигов между фронтами распространяющихся волн. Результаты работ Клем-Мусатова опубликованы в научных журналах, обобщены в монографии [19], которая была перевыпущена на английском языке [44].

Исследованием дифрагированных волн также посвящены труды советского геофизика Г.Л. Ковалевского [45]. Он отметил и подтвердил экспериментально, что сейсмические аномалии могут быть связаны наличием малоамплитудных сбросов.

Физическому моделированию волновых полей для сред, содержащих рассеивающие объекты посвящена работа [46]. Авторы продемонстрировали, что возможно выделять дифрагированные волны в сейсмических записях и использовать дифрагированные волны для обнаружения небольших структурных элементов, таких как разломы, выклинивания пластов и другие виды структурных неоднородностей.

Обзор методов алгоритмов разделения волновых полей и внедрения дифрагированных волн в стандартный алгоритм обработки данных представлен в статье [32].

Геологические предпосылки

Картирование локальных неоднородностей и резких краев разломов важнее всего при построении сейсмических разрезов месторождений углеводородов. Изменение структуры геологической среды в результате разрывных нарушений приводит к формированию ловушек углеводородов. Выделяют три основных типа ловушек углеводородов: структурные, стратиграфические и смешанные [47]. На рис. 35 изображена схема структурных ловушек, в которых нефть и газ скапливаются либо в сводах брахиантиклинальных складок в пласте-коллекторе, перекрытом непроницаемым пластом-покрышкой (рис. 35 а), либо вблизи разлома с вертикальным смещением слоев, в результате которого пласт-коллектор экранируется по латерали пластом-покрышкой (рис. 35 б).

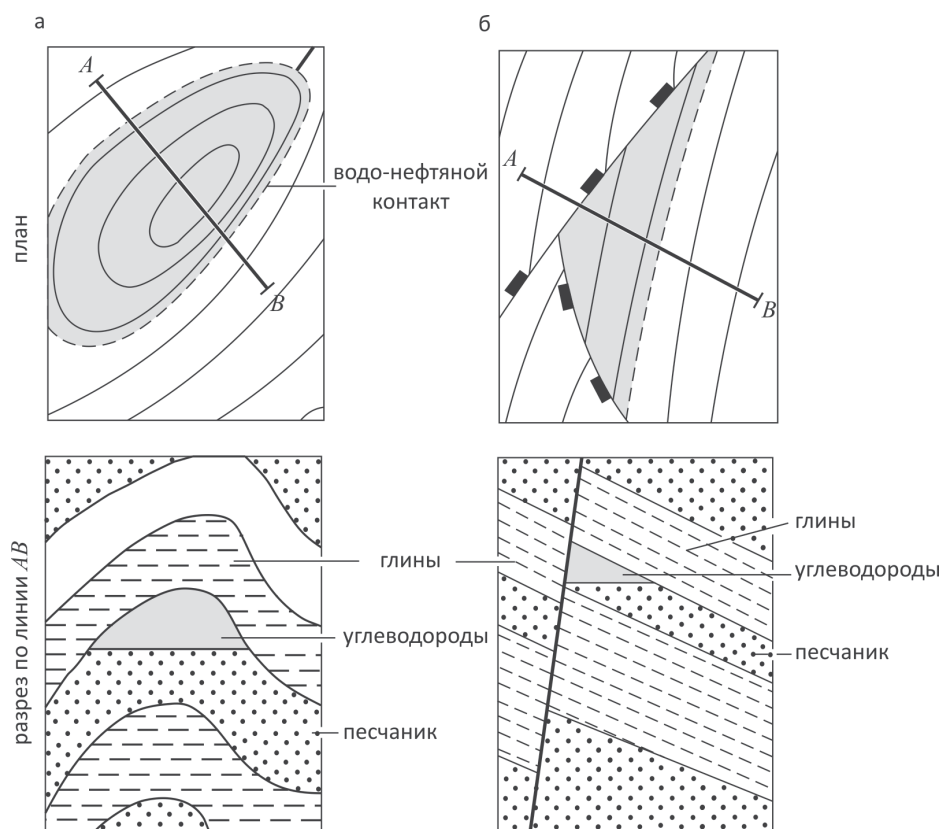


Рис. 35. Структурные ловушки углеводородов [47].

Согласно геологическому словарю [48], разломом называется нарушение сплошности горных пород, которое может происходить как без смещения, так и со смещением пород по поверхности разрыва. В работе рассматриваются разломы, основное направление движения в которых происходит в вертикальной плоскости, то есть разлом со смещением по падению.

В роли пласта-коллектора могут выступать пористые песчаники или трещиноватые известняки. Что касается пластов-покрышек, или флюидоупоров, то здесь необходимы относительно непроницаемые горные породы, такие как глины или соли [47]. В связи с этим места скопления углеводородов как правило приурочены к осадочным горным породам. Осадочные толщи обладают свойством слоистости, которое характеризуется чередованием слоёв, обладающими различными свойствами: крупность зерен, текстура внутри слоёв и т. д. [48]. Свойство слоистости самой горной породы внутри каждого отдельного слоя называют слойчатостью. Слоистость классифицируют по мощности слоёв, по характеру контактов между ними, по соотношению слоёв и типу их сочетаний [49]. Чередующиеся слои различного состава или характеризующиеся различными физическими параметрами можно рассматривать как модель многослойной среды.

При анализе поля упругих смещений, распространяющегося в такой многослойной среде, различают толстые и тонкие слои [6]. Слой называется толстым, если его мощность превышает длину волны зондирующего сейсмического сигнала. Тонким слоем называют слой, мощность которого не превышает длины волны. Длина волны определяется отношением скорости в среде V к частоте зондирующего сигнала f : $\lambda = \frac{V}{f}$. Поэтому, становится очевидным, что понятие тонкого и толстого слоя является относительным: один и тот же слой в зависимости от параметров

V и f , т.е. длины волны, может рассматриваться то как тонкий, то как толстый [13].

Известно [7], что при распространении полей упругих волн в многослойных средах скорость сейсмической волны становится зависимой от направления распространения. А если физические параметры среды зависят от направления распространения волны, то такая среда является анизотропной. Многослойные среды можно отнести к трансверсально-изотропным упругим средам, в которых при повороте на любой угол вокруг оси симметрии среда совмещается сама с собой [50]. В связи с чем трансверсально-изотропные среды называют средами со слабой анизотропией [51].

При падении волны на пачку толстых слоев, когда расстояние между границами внутри каждого слоя много больше длины волны (или, если время распространения волны между границами много больше продолжительности сигнала), то для анализа распространения волнового поля можно использовать лучевой метод [6]. Поле в этом случае будет слагаться из волн, отраженных и преломленных на всех границах. Все эти волны будут разделены во времени, так что сейсмограмма будет представлять собой последовательность отдельных сигналов (импульсов).

Иная картина будет, в случае падения волны на пачку тонких слоев, т.е. когда время распространения волны между границами внутри одного слоя порядка или меньше продолжительности сигнала [6]. Волны, отраженные от границ слоев, будут интерферировать, образуя единую интерференционную волну, содержащую большое число элементарных волн. Характер интерференционной картины будет в этом случае зависеть от длины волны. Коэффициент отражения от пачки тонких слоев становится частотно зависимым. Для анализа поля в средах, содержащих тонкие слои, лучевой метод непригоден. В этом случае используются другие методы, например, вейвлет анализ [52].

Объединяя все вышеперечисленное, становится ясно, что сочетание разломов и тонкослоистых сред затрудняет построение сейсмических изображений. Традиционные сейсмические методы обработки не позволяют получить необходимую информацию о резких краях разлома. В данной работе для построения сейсмического разреза предлагается использовать дифрагированные волны, кинематические и динамические свойства которых позволяют локализовать местоположение резких краев разлома, а также определить мощности слоев.

Моделирование данных

Моделирование волнового поля, удовлетворяющего уравнению (48), осуществлялось посредством псевдоспектрального метода Фурье [30], [31].

Скоростная модель среды

При моделировании данных использовалась модель среды (рис. 36), которая состоит из трех слоев, расположенных между двумя полупространствами. Слои смещены относительно друг друга вдоль разлома, угол накола которого составляет 27° (рис. 37).

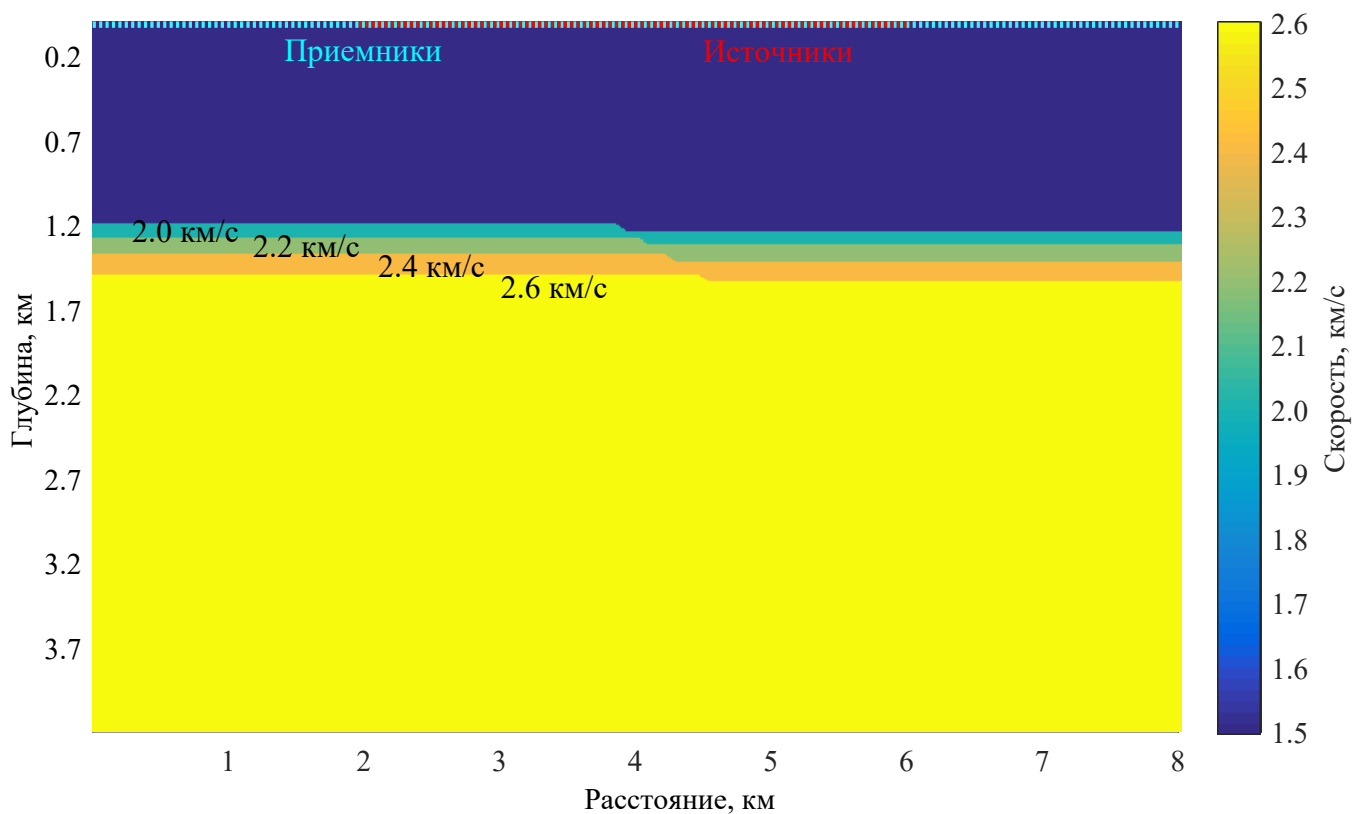


Рис. 36. Скоростная модель среды

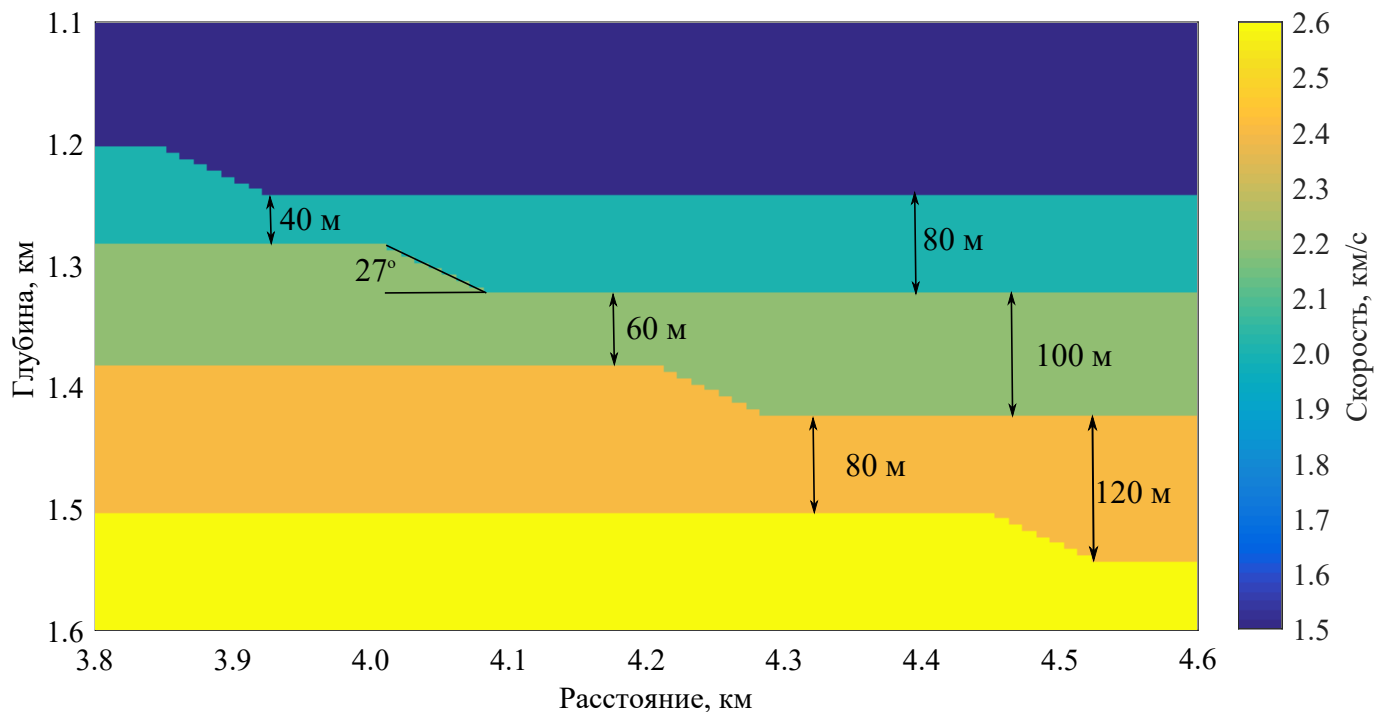


Рис. 37. Увеличенный фрагмент скоростной модели среды, изображенной на рис. 36

В качестве функции источника использовался импульс Рикера. Центральная частота импульса — 15 Гц. Максимальная частота импульса — 30 Гц. Длина волны зондирующего сигнала в верхнем полупространстве $\lambda = \frac{1500}{15} = 100$ м, в первом слое — $\lambda = \frac{2000}{15} \approx 133$ м, во втором слое

— $\lambda = \frac{2200}{15} \approx 147$ м, в третьем слое — $\lambda = \frac{2400}{15} = 160$ м, и в нижнем полупространстве — $\lambda = \frac{2500}{15} \approx 167$ м. Интервал дискретизации по времени при моделировании составлял 2 мс.

Схема наблюдений

Различают наземную, морскую и скважинную сейсморазведку. В данной работе приведена некоторая имитация морской сейсморазведки. Поэтому сначала необходимо сказать несколько слов об особенностях морских сейсморазведочных работ. В таких работах в качестве источника колебаний используют пневматические источники (воздушная пушка) или электроискровые источники (спаркер). Регистрация отклика среды осуществляется гидрофонами, смонтированными на определенном расстоянии друг от друга в сейсмическую косу (рис. 38) [47]. Коса буксируется за судном в притопленном положении.

При проведении морских сейсморазведочных работ на сейсмической записи неизбежно появляются волны-спутники. Они образуются в результате переотражения сигнала от границы вода-воздух. Подавление волн спутников возможно как на этапе регистрации данных (использование специальных схем наблюдений), так и на этапе обработки, с помощью специальных алгоритмов, например при помощи адаптивного вычитания. Поскольку подавление волн-спутников не является целью данной работ, то при моделировании использовалось условие свободной границы, которое позволяет симитировать отсутствие границы вода-воздух.

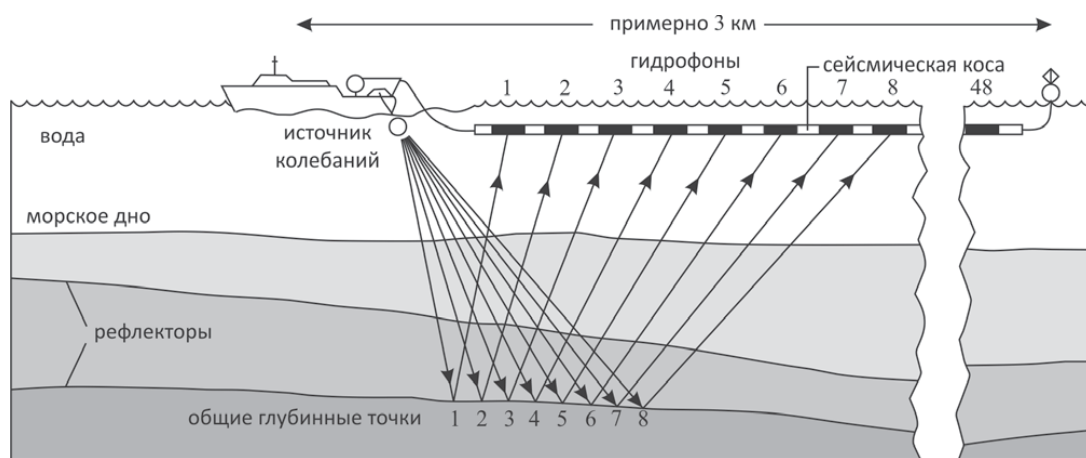


Рис. 38. Схема регистрации данных при проведении морских сейсморазведочных работ [47].

В данной работе использовалась следующая схема наблюдений: источники и приемники располагались вдоль одной горизонтальной линии (рис. 36), на глубине $z = 5$ м; координата первого пункта приема $(0, 5)$, координата последнего пункта приема $(8000, 5)$, всего приемников 801, расположенных с шагом в 10 м; горизонтальная координата источника изменялась от 2000 до 6000 м; пункт взрыва каждый раз сдвигался на 10 м, при этом регистрация осуществлялась во всех приемниках. Взрывы между собой считались независимыми. На рис. 39 изображен график кратности перекрытия сейсмограмм при использовании описанной схемы наблюдения.

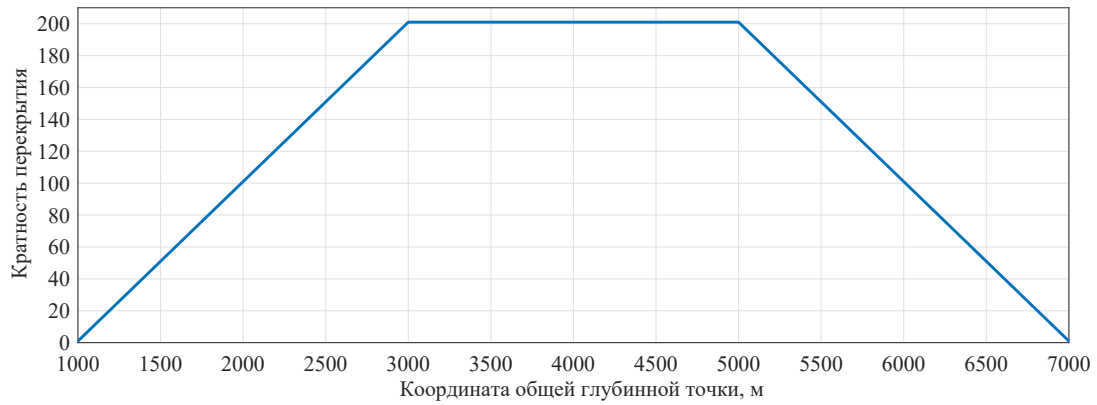
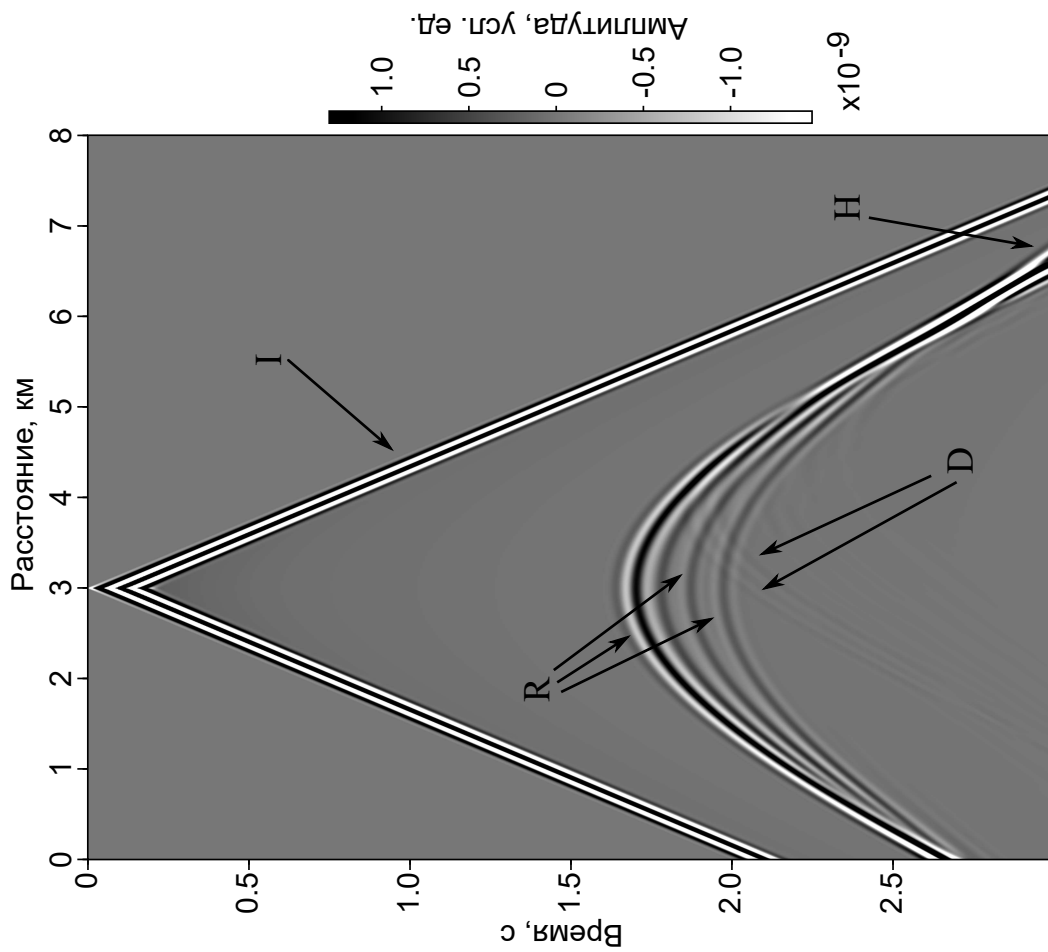


Рис. 39. Кратность перекрытия сейсмограмм, источники и приемники расположены на одной линии, поэтому горизонтальная координата общей глубинной точки вычисляется по формуле $\frac{s_x + r_x}{2}$, где s_x и r_x горизонтальные координаты местоположения источника и приемника.

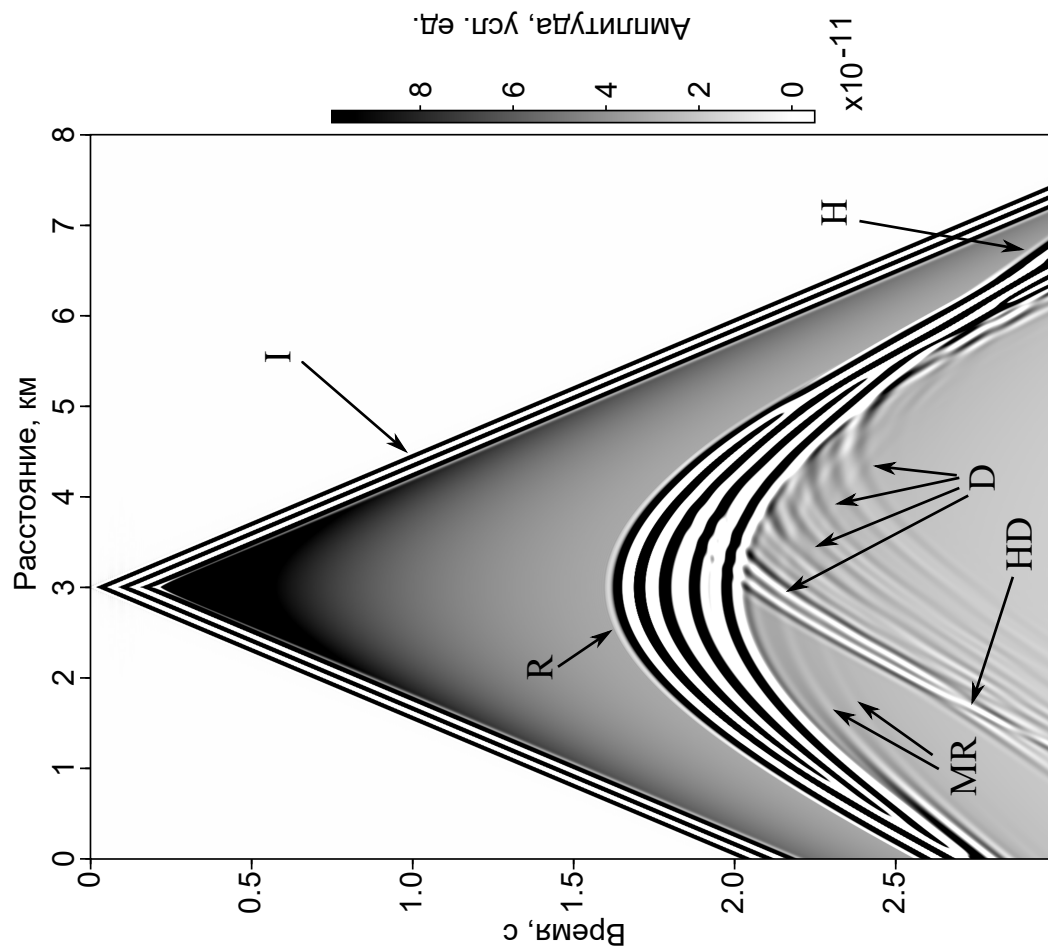
В случае, когда отражающая граница будет не горизонтальной, а наклонной, то глубинные точки для каждой пары источник-приемник уже не совпадают друг с другом. В этом случае рассматривается вместо одной точки общая глубинная площадка, в пределах которой лежат все вычисленные глубинные точки для каждой пары источник-приемник.

Результаты численного моделирования

На рисунках 40 и 41 представлены синтетические сейсмограммы общего пункта взрыва двух источников, расположенных слева и справа от разлома.

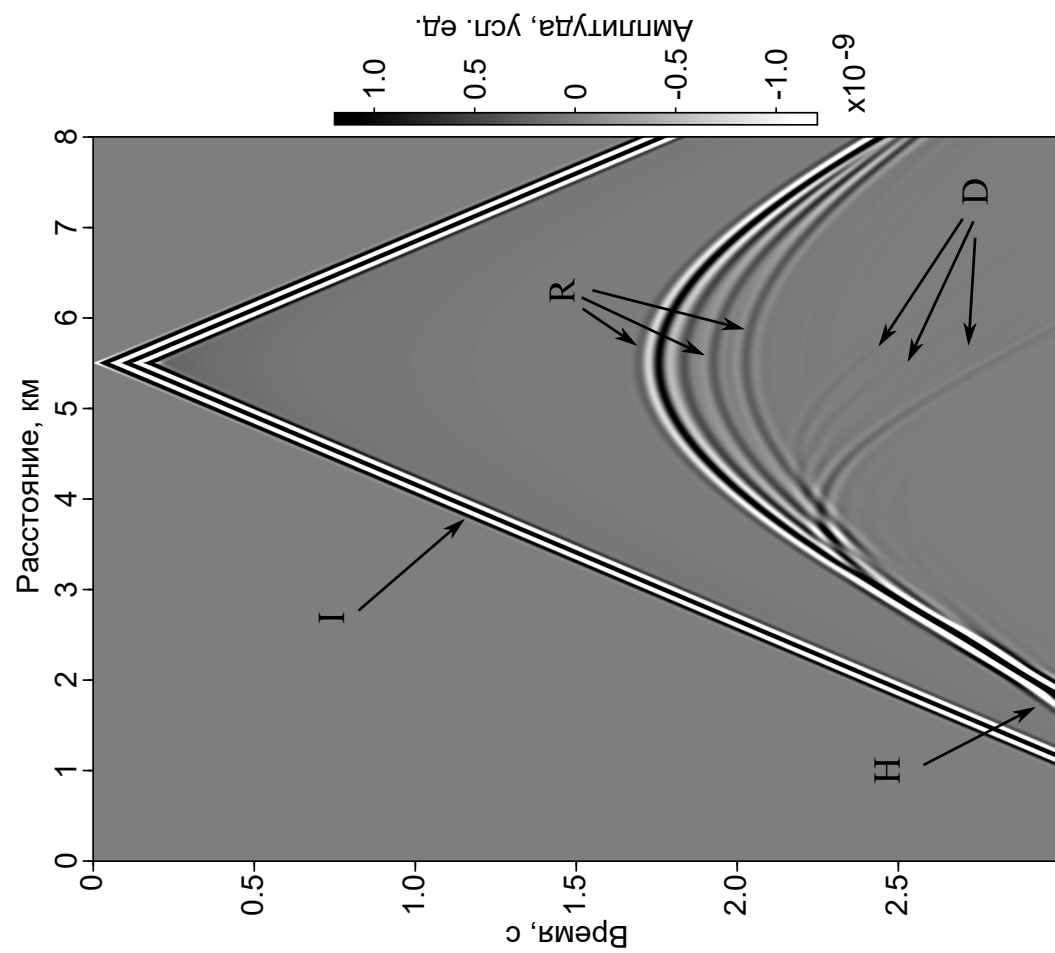


а

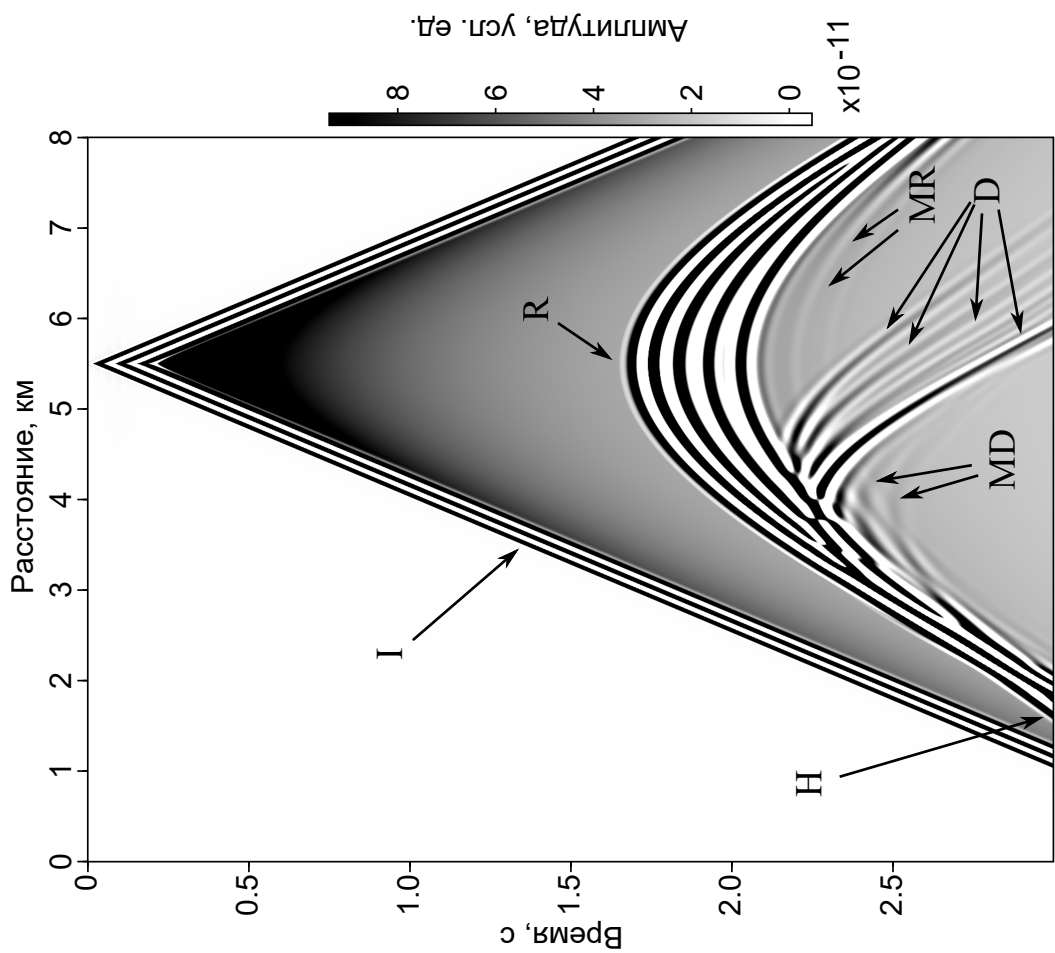


б

Рис. 40. Сейсмограмма общего пункта вызыва. Источник расположен слева от разлома. *I* — прямая волна, *R* — отраженные волны, *MR* — кратные отраженные волны, *H* — головная волна, *D* — дифрагированные волны, *HD* — “головные” дифрагированные волны.



а



б

Рис. 41. Сейсмограмма общего пункта взрыва. Источник расположен справа от разлома. *I* — прямая волна, *R* — отраженные волны, *MR* — кратные отраженные волны, *H* — головная волна, *MD* — кратные дифрагированные волны.

Обработка данных

Первый этап обработки данных заключался в присвоении дополнительных заголовков каждой трассе (вынос и общая глубинная точка), а также в обнулении прямой волны. На рис. 42 показан разрез нулевого выноса. Отчетливо видны отраженные волны от первой, третьей и четвертой границ. Отражение от второй границы скрыто на фоне отражения от первой границы. Дифрагированные волны на разрезе общего выноса представляют собой гиперболы.

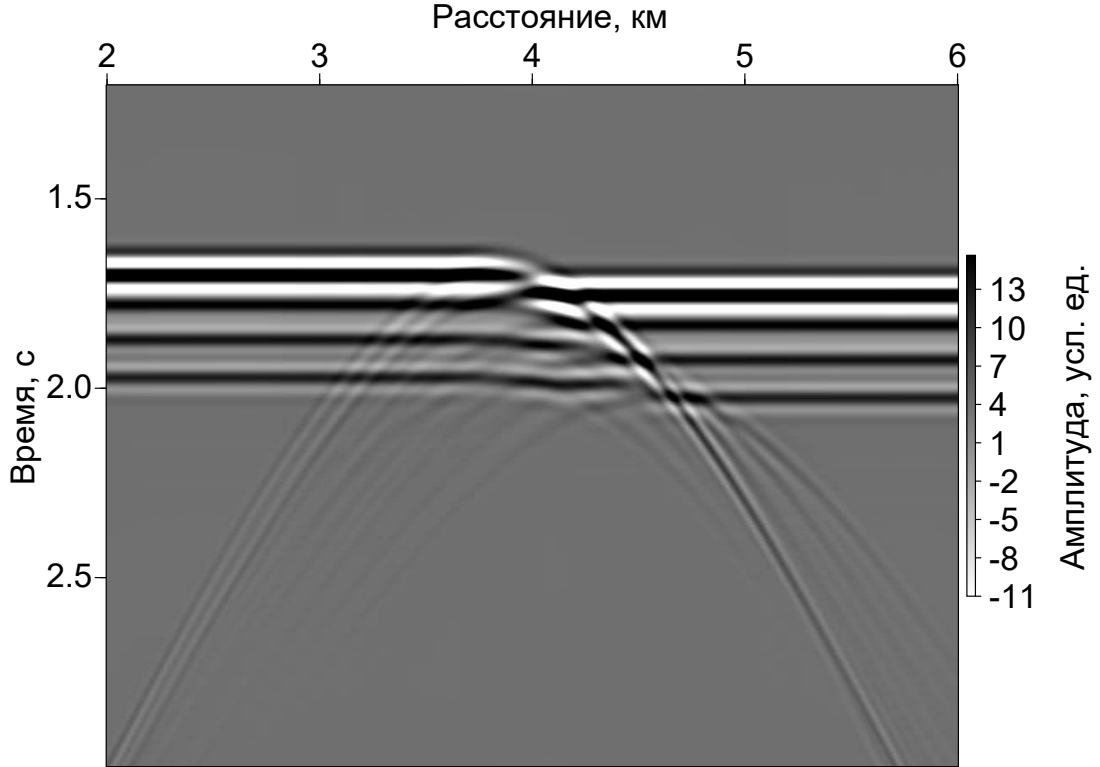


Рис. 42. Разрез нулевого выноса

Скоростной анализ

На втором этапе посредством скоростного анализа были получены значения кинематических поправок — $t_{\text{ОГТ}}$ и скорость $V_{\text{ОГТ}}$. В зарубежной литературе для обозначения скорости $V_{\text{ОГТ}}$ используется обозначение V_{NMO} , а также термин стековая скорость V_{stack} . В ряде публикаций встречается использование скорости $V_{\text{ОГТ}}$, как среднеквадратичной скорости V_{RMS} , которая определяется в соответствии с формулой Дикса:

$$V_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{V_1^2 \tau_1 + V_2^2 \tau_2 + \dots + V_n^2 \tau_n}{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n}}, \quad (55)$$

где τ_1, τ_2, \dots — времена пробега волны в одну сторону для каждого слоя, V_1, V_2, \dots — истинные скорости в каждом слое.

Следует отметить [53], что для случая горизонтально слоистой среды с однородными слоями, равенство скорости $V_{\text{ОГТ}}$ среднеквадратичной скорости V_{RMS} справедливо только для опреде-

ленных значений выноса L , таких что

$$\frac{L}{H} < 0.8 \text{ --- } 1.0 \quad (56)$$

где H — глубина до первой отражающей границы. В западной литературе такое ограничение называется small-spread approximation [54]. Поэтому при введении кинематических поправок использовались не все значения выносов, а только выносы, удовлетворяющие соотношению (56).

После определения пар $t_{\text{ОГТ}}$ и $V_{\text{ОГТ}}$ была выполнена операция суммирования данных по методу общей глубинной точки (рис. 43 а) [13].

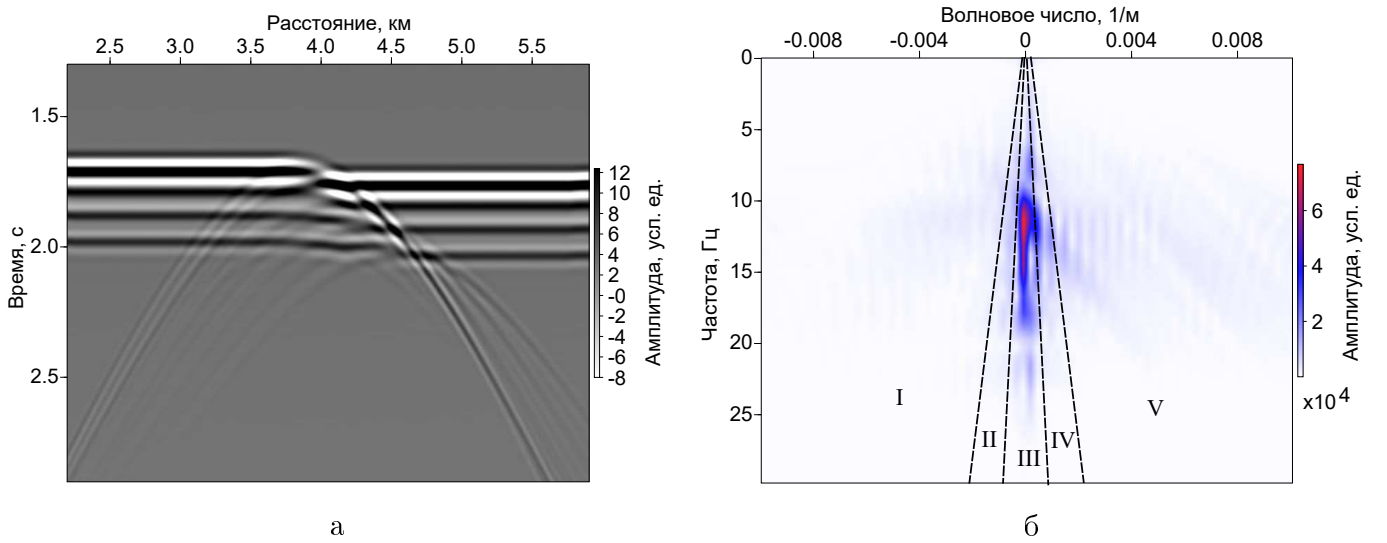


Рис. 43. Данные после суммирования: а) сейсмограмма и б) ее f-k спектр

Разделение волновых полей

Выделение дифрагированной составляющей волнового поля осуществлялось посредством f-k фильтрации. Селекцию колебаний в двумерной спектральной области называют f-k фильтрацией в соответствии с обычными обозначениями временной f и пространственной k частот [13]. Сначала сейсмический разрез, который представляет собой данные в пространстве (x, t) , где x — это пространственная координата, а t — это время, трансформируют в спектральную область — пространство (k, f) , где k — волновое число, или пространственная частота, а f — временная частота.

Затем данные в спектральной области разделяются на несколько областей (рис. 43 б). На разрезах общего выноса или на разрезе после суммирования отраженные волны имеют форму прямых линий, а дифрагированные — гипербол. Поэтому при переходе в спектральную область — пространство (k, f) — отраженные волны перейдут в область III, а дифрагированные будут расположены в остальной части пространства, преимущественно в областях I и V. Для выделения дифрагированных волн, амплитуды в областях I и V умножаются на единицу, а амплитуды в области III — на нуль. В промежуточных зонах II и IV амплитуды умножаются на коэффициент, значения которого изменяются от нуля до единицы (линейная интерполяция от 0

до 1). Последний этап заключается в обратном двумерном преобразовании Фурье выделенных данных, в результате которого в пространстве (x,t) остается только желаемый сигнал.

На рис. 44 а, 44 б и рис. 45 а, 45 б изображены спектры дифрагированных и отраженных волн, и соответствующие им разрезы после фильтрации.

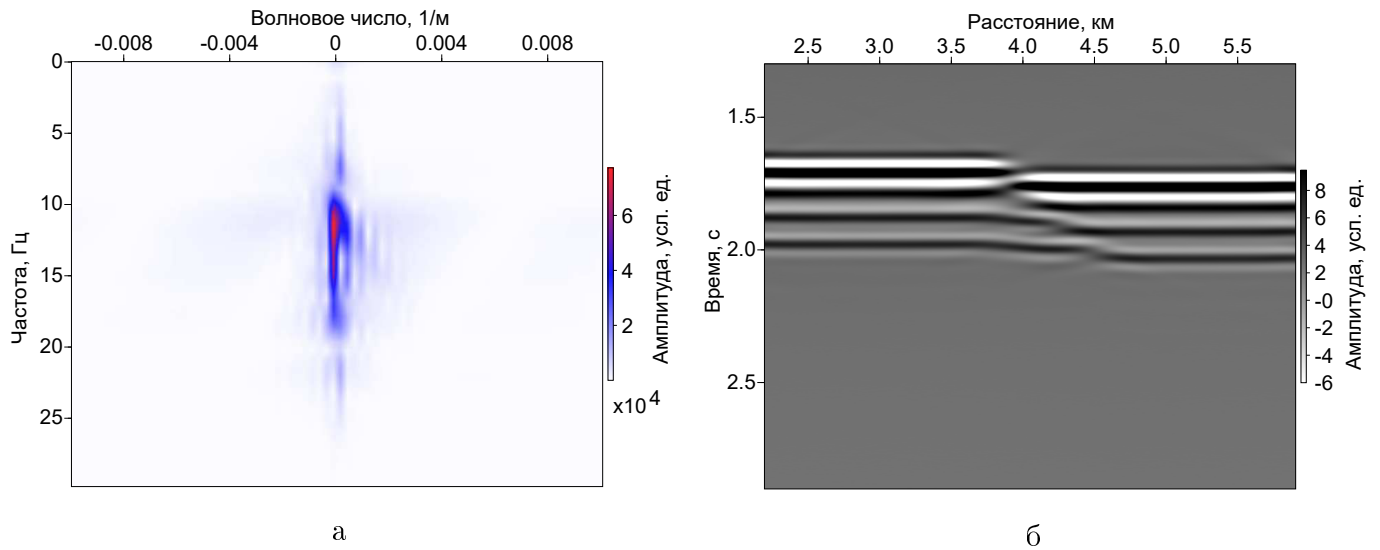


Рис. 44. Спектр отраженных волн (а) и результат применения f-k фильтрации (б)

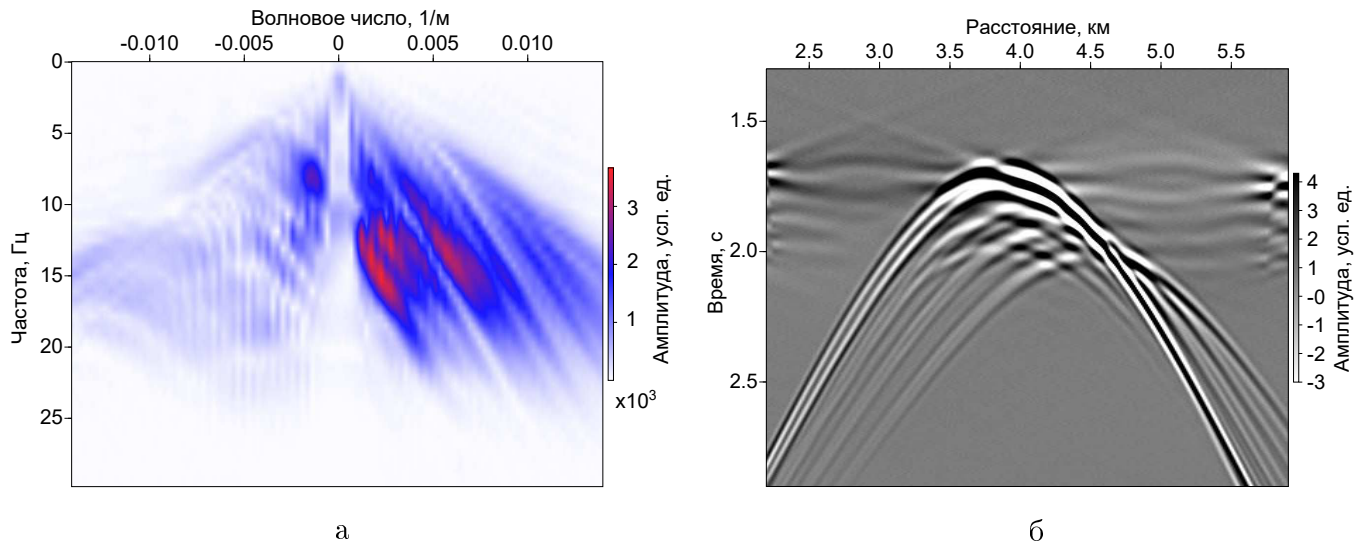


Рис. 45. Спектр дифрагированных волн (а) и результат применения f-k фильтрации (б)

Анализ когерентности

Следующий этап обработки заключался в анализе когерентности дифрагированных волн, имеющих на сейсмических разрезах. Под когерентностью понимается статистическая оценка степени синфазности сигнала вдоль определенной кривой. Для дифрагированных волн форма этой кривой определяется кривой годографа дифрагированной волны:

$$t = \sqrt{T_0^2 + \frac{4(x - X_0)^2}{v^2}}, \quad (57)$$

где T_0 — величина нормального времени прихода, X_0 — горизонтальная координата приемника.

Для надлежащей статистической оценки суммирование амплитуд следует проводить не по одному годографу, а по множеству n годографов [13]. В результате чего образуется некоторое окно суммирования криволинейной формы шириной T (рис. 46). В пределах этого окна используется NM амплитудных отсчетов y_{nm} , соответствующих временам годографов t_{nm} . Множество n годографов, для которых при фиксированном значении параметра v_l величина нормального времени отражения изменяется в интервале T , связанным с исходным значением T_0 как

$$T_{0n} = T_0 + n\Delta t \quad (58)$$

где Δt — шаг дискретизации записи сейсмических трасс, $T = n\Delta t$. Времена подобных годографов определяются следующим образом:

$$t_{nm} = T_{0n} + \Delta\tau_{nm}(T_{0n}, v_l). \quad (59)$$

Обычно ширина временного интервала T соответствует средней длине импульсов анализируемого сигнала.

Для определения синфазности колебаний в качестве критерия будем использовать коэффициент подобия $S_l(T_0, X_0, v_l)$, который позволяет оценить степень сходства амплитудных отсчетов вдоль пробного годографа, определяемого параметрами X_0 , T_0 и v_l . Формула для коэффициент подобия $S_l(T_0, X_0, v_l)$ записывается в виде

$$S_l(T_0, X_0; v_l) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \frac{V_n}{W_n}, \quad (60)$$

где $V_n = \left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^m y_{nm}(t_{nm}) \right)^2$ — квадрат среднего значения амплитуд y_{nm} на линии годографа t_{nm} , $W_n = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^m y_{nm}^2(t_{nm})$ — средний квадрат значений амплитуд y_{nm} на линии годографа t_{nm} .

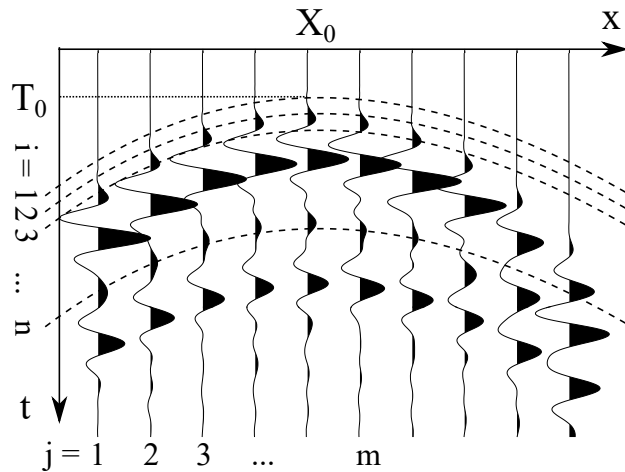


Рис. 46. Фрагмент сейсмограммы с интервалом когерентного анализа.

Для каждой точки с координатами (X_0, T_0) (рис. 46) задавался набор скоростей, например от $V_1 = 1500$ м/с до $V_2 = 2600$ м/с с шагом в 10 м/с. Для каждого значения скорости при фиксированных параметрах X_0 и T_0 вычислялось значение когерентности S_l . Затем, среди полученных

значений S_l выбиралось максимальное значение, которое присваивалось точке с координатами (X_0, T_0) . Осуществляя такие операции для каждой точки можно получить карту когерентности (рис. 47, 48), максимальные значения на которой соответствуют местоположению резких краев разлома. Отметим, что максимальному значению когерентности соответствует определенное значение скорости v_l . В связи с чем можно определить не только местоположение точек разлома, но и скорости в этих точках.

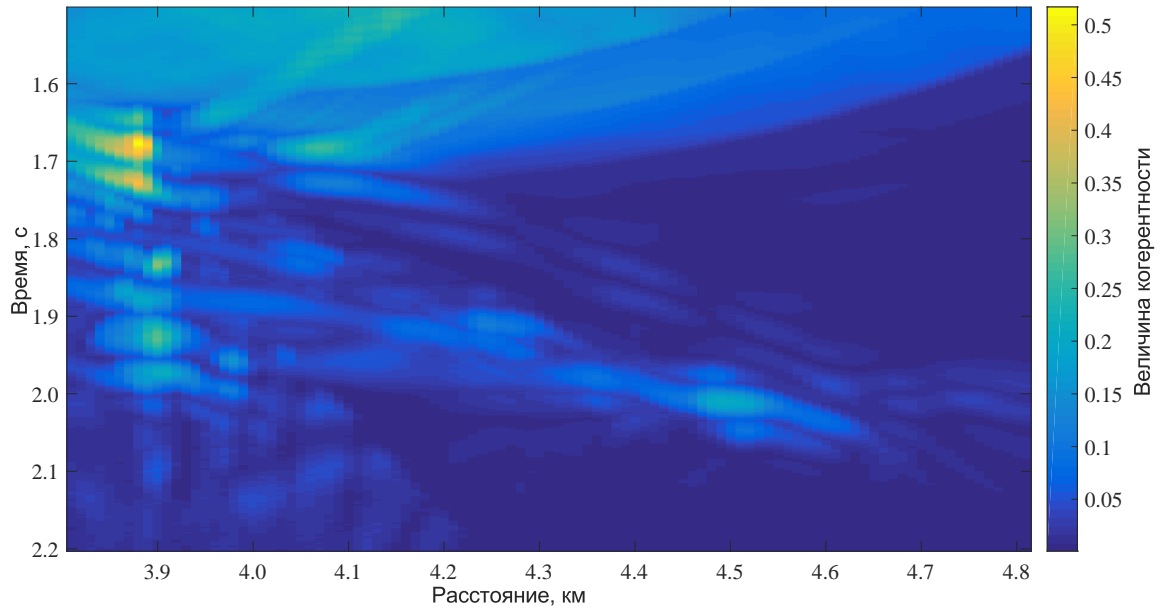


Рис. 47. Карта когерентности для разреза после суммирования и f-k фильтрации.

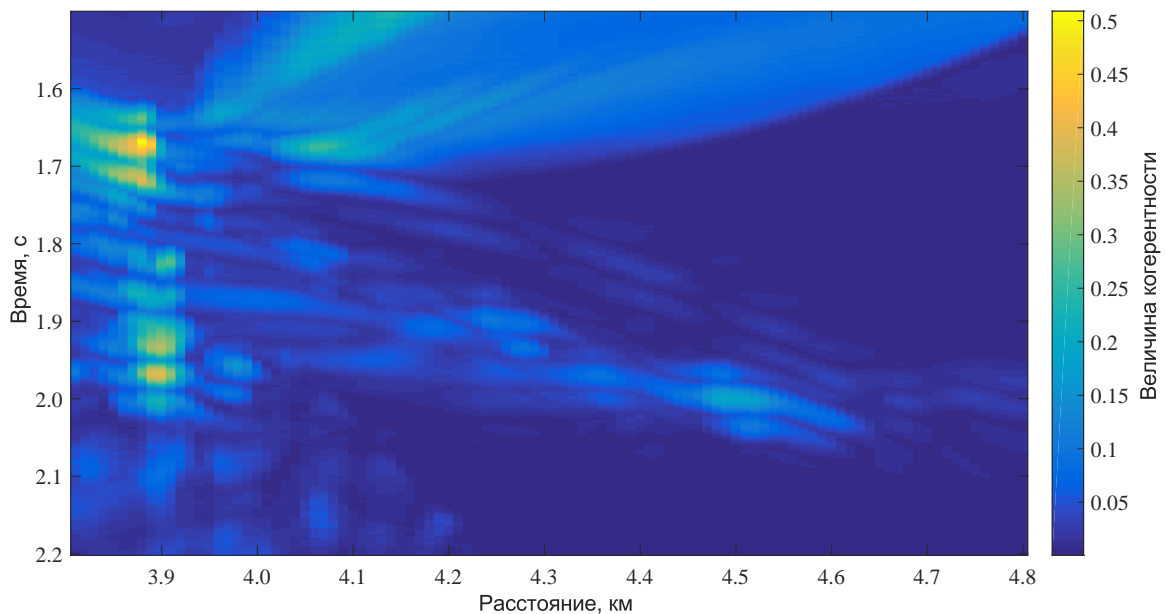


Рис. 48. Карта когерентности для разреза нулевого выноса и f-k фильтрации.

Анализ когерентности был проведен для двух разрезов: для разреза нулевого выноса, после

применения f - k фильтрации, и для разреза после суммирования, после применения f - k фильтрации. Результаты показанные на рисунках говорят о том, что суммирование сейсмограмм по методу общей глубинной точки негативно сказывается на анализе дифрагированных волн, в связи с чем информативность соответствующей карты когерентности ниже, чем информативность карты когерентности для разреза нулевого выноса после применения f - k фильтрации.

В результате исследования была продемонстрирована возможность применения дифрагированных волн для определения местоположения резких краев разлома в тонкослоистой среде. Синтетический пример иллюстрирует, что дифрагированная компонента волнового поля действительно дает оценку толщины тонких слоев, а также величину латеральной протяженности разлома. Предлагаемый подход может быть успешно использован для извлечения информации о скорости в сложных геологических условиях. Это особенно важно в случаях, когда нет достоверной информации об отраженных волнах.

Заключение

В диссертации представлено исследование кинематических и динамических свойств дифрагированных волн, а также их применение при решении обратной задачи сейсморазведки в случае тонкослоистых сред при наличии разломов.

В работе рассмотрен случай падения цилиндрической волны на прозрачный акустический угол. Используя метод численного моделирования, построены волновые поля для рассматриваемой задачи. Положения волновых фронтов, извлеченных из данных численного моделирования, совпадают с положениями соответствующих волновых фронтов, рассчитанных аналитически. Предложен способ построения зависимости амплитуды дифрагированной волны от угла ее выхода из точки дифракции. На амплитудной кривой выделены особые области, включая области поперечной диффузии.

В следующей части работы продемонстрирована возможность применения дифрагированных волн для определения мощности тонких слоев при наличии разломов, а также для извлечения информации о скорости в сложных геологических условиях. Применяя численное моделирование, были получены синтетические данные для модели тонкослоистой среды, смещенной по разлому. Использовались как кинематические, так и динамические свойства дифрагированных волн для локализации зоны разлома. Процесс обработки данных включает два этапа: разделение волновых полей и построение карты когерентности. Применение f - k фильтра к сейсмическому разрезу общего выноса и к суммированному разрезу позволяет отделить дифрагированное поле от отраженного поля. Следующий этап заключается в построении для дифрагированных волн карты когерентности, позволяющей локализовать местоположения краев разлома, а также определить распределение скоростей в его окрестности.

Литература

1. Каштан Б.М. Основные положения динамической теории распространения упругих волн: Учебно-методическое пособие. – СПб., 1998. – 24 с.
2. Физическая энциклопедия Волны // Физическая энциклопедия (в 5 томах) / Под редакцией акад. А. М. Прохорова. — М.: Советская Энциклопедия, 1988. — Т. 1.
3. Физическая энциклопедия Механика// Физическая энциклопедия (в 5 томах) / Под редакцией акад. А. М. Прохорова. — М.: Советская Энциклопедия, 1988. — Т. 5.
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика сплошных сред, М. 1953, издание второе, С 13.
5. Общая акустика. М. А. Исакович. Учебное пособие. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1973 г., стр 9.
6. Сейсморазведка. Справочник геофизика /Под ред. И. И. Гурвича, В. П. Номоконова. — М.: «Недра», 1981. — 464 с.
7. Петрашень. Распространение волновых полей сигнального типа в упругих сейсмических средах: Учебник. – СПбГУ. Изд-во С.-Петерб. Ун-та, 200 – 452 с. стр 45
8. Б. М. Каштан, И. В. Абакумов. Лучевой метод в линейной теории упругости: учебно-методическое пособие. – СПб.: СПбГУ. Физический факультет, 2014. — 32 с.
9. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
10. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. — М.: Связь, 1978. — 248 с.
11. J. В. Keller Geometrical theory of diffraction. J. Opt. Soc. Amer. 52:116-30, 1962
12. Каштан Б.М. Волновые поля основных типов сейсмических источников: Учебно-методическое пособие. – СПб., 1998. – 33 с.
13. Г.Н. Боганик, И.И. Гурвич. Сейсморазведка: Учебник для вузов. Тверь: Издательство АИС, 2006. 744 с.
14. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. Изд-во “Наука”, М. 1973, 343 стр.

15. Classical and Modern Diffraction Theory Kamill Klem-Musatov, Henning Hoeber, Michael Pelissier, and Tijmen Jan Moser 2016 pp 327
16. П.Н. Дагуров, А.В. Дмитриев. О граничной дифракционной волне в теории Френеля-Кирхгофа. Письма в ЖТФ, 2009, том 35, вып. 10. с. 49-57.
17. R.C. Assier, N. Peake. On the diffraction of acoustic waves by a quarter-plane. Wave Motion 49, 2012, pp. 64-82
18. F. Hron, G.N. Chan. Tutorial on the numerical modeling of edge diffracted waves by the ray method. Studia geophysica and geodezia. v 39. 1995. 103-137.
19. Д.К. Клем-Мусатов. Теория краевых волн и ее применение в сейсмике. — Новосибирск: Наука, 1980. 296 с.
20. C. Valencia, J. Gomez, J Jaramillo, M. Saenz, J. Vergara. The scattering of SH waves by a fine crack with a superposition-based deffraction technique. Study of Geophys and Geodezy, 61 (2017), 93-114.
21. J.H. Poincare, Sur la polarization par diffraction, (Part 1), Acta Mathematica, 16, (1892), 297-339.
22. J.H. Poincare, Sur la polarization par diffraction, (Part 2), Acta Mathematica, 20, (1896), 313-356.
23. A. Sommerfeld, Mathematische Theorie der Diffraction. Math. Ann., 47, 1896, pp. 317-374.
24. A. Sommerfeld, Theoretisches uber die Beugung der Rontgenstrahlen, Zeitschrift fur Mathematik und Physik, Leipzig, 1901, pp. 11-97.
25. Н.В. Мокеева. Исследование вопроса о корректности задач дифракции в случае угловых областей. Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Санкт-Петербург, 2008.
26. Бабич В.М., Лялинов М.А., Грикуров В.Э. Метод Зоммерфельда-Малюжинца в теории дифракции. — СПб: ВВМ, 2004. — 103 с.
27. J. Croisille, G. Lebeau. Diffraction by an immersed elastic wedge, Springer, 1999. P 138. Lecture notes in mathematics, Vol 1723
28. V.M. Babich, N.V. Mokeeva, B.A. Samokish Diffraction of a plane wave by a transparent wedge. Calculation of the diffraction coefficients of wave scattered by vertex of the wedge. Days on Diffraction 2011 pp 33-38
29. V.M. Babich, N.V. Mokeeva, B.A. Samokish Diffraction of a plane wave by a transparent wedge. Numerical approach. Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2012, pp. 27-31.

30. D.D. Kosloff, E. Baysal. Forward modeling by a Fourier method. *Geophysics* vol 47, no 10 (october), 1982, P. 1402—1412.
31. D. Kosloff, A.Q. Filho, E. Tessmer, A. Behle. Numerical solution of the acoustic and elastic wave equations by a new rapid expansion method. *Geophysical Prospecting* 37, pp. 383-394, 1989.
32. Е.И. Ланда. Роль дифракционной компоненты волнового поля при построении сейсмических изображений. *Технологии сейсморазведки*, no 1, 2013, с. 5-31.
33. Khaidukov V., Landa E., Moser T.J. Diffraction imaging by focusing-defocusing: an outlook on seismic super resolution *Geophysics*. 2004. V 69. P. 1478-1490.
34. Moser T.J., Howard C.B. Diffraction imaging in depth *Geophysical prospecting* V 56 2008 P. 1150-1165
35. Т.И. Облогина, Е.А. Ефимова, Ф.М. Ляховицкий, В.Б. Пийп. Расширение интерпретационных моделей в сейсмике. *Вестник Московского университета. Серия 4. Геология*, 1984, no 2 стр 20-25.
36. R.F.P. Hardman, J.E. Booth. The significance of normal faults in the exploration and production of North Sea hydrocarbons
37. T. Krey. The significance of diffractions in the investigation of faults *Geophysics* 1952 V 17 P. 843—858.
38. J.G. Hagedoorn A process of seismic reflection interpretation *Geophysical prospecting* 1954 V 2 P. 85-127.
39. Облогина Т.И. Динамические характеристики дифрагированных волн. — *Изв. АН СССР. Сер. геофиз.*, 1956, no 4, с. 377-390.
40. Облогина Т.И. О дифрагированных сейсмических волнах. — *Прикладная геофизика*, 1958, вып. 20, с. 12-33.
41. Облогина Т.И. О форме и спектре дифрагированных волн. — *Изв. АН СССР. Сер. геофиз.*, 1964, no 1, с. 20 -28.
42. Oblogina T. I. Diffracted seismic waves in applied geophysics of USSR. Pergamun Press, Oxford — London — New York — Paris, 1962, p. 99 — 120.
43. И.О. Рогоза, А.Г. Курочкин. Анализ природы дугообразных осей синфазности на временных разрезах ОГТ. 46—59
44. K. Klem-Musatov, A.M. Aizenberg, J. Pajchel, H.B. Helle. Edge and tip diffractions. Theory and applications in seismic prospecting. *Geophysical monograph series*, no. 14 2008 p 226

45. Ковалевский Г.Л. Кинематические и некоторые динамические свойства дифрагированных волн. Геология и геофизика. 1971. по 7. С. 101-110.
46. Ланда Е. Максимов А. Опробование алгоритма выделения малоамплитудных сбросов. Геология и геофизика. 1980 по 12 С. 126-132.
47. С. В. Аплонов, К.В. Титов. Геофизика для геологов: Учебник. — СПб.: Издательство СПбГУ, 2012. — 248 с.
48. Allaby, M. Dictionary of Earth Sciences. 2008 Oxford University Press.
49. C.V. Campbell. Lamina, laminaset, bed and bedset. Sedimentology, 8 (1967), pp. 7-26.
50. Каштан Б.М. Основы теории распространения волн в анизотропных упругих средах: Методические указания для студентов, магистрантов и аспирантов, — СПб.: Издательство СПбГУ., 1998. — 28 с.
51. L. Thomsen Weak elastic anisotropy Geophysics vol 51 no 10 october 1986 p 1954-1966.
52. К.Ю. Санников, Е.Л. Лыскова, Г.В. Голикова. Применение вейвлет-анализа для слоистого разреза. Вестник СПбГУ, Сер. 4 2012 Вып.2 стр. 29 -39.
53. Э.А. Бляс. Новый взгляд на скорости ОГТ в слоистых латерально-неоднородных средах: аналитическое и численное исследование. Технологии сейсморазведки.
54. Yilmaz O., 1987, Seismic data processing: SEG, 526.
55. В.Н. Троян, Ю.В. Киселев. Статистические методы обработки и интерпретации геофизических данных: Учебник. — СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2000. — 578 с.

Приложение 1. Вывод акустического уравнения

Распространение волновых полей в идеальной упругой среде описывается уравнением движения:

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \overrightarrow{\text{Div}} t_{ik} + \mathbf{f} \quad (61)$$

$$\overrightarrow{\text{Div}} t_{ik} = \sum_{k=1}^3 i_k \vec{\text{div}} t_k \quad (62)$$

где \mathbf{f} — вектор плотности массовых сил, ρ — плотность вещества среды. Для жидких сред модуль сдвига $\mu = 0$, в связи с чем тензор напряжений t_{ik} записывается как [7]

$$t_{ik} = \lambda(\mathbf{x}) \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta_{ik}, \quad (63)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера, $\lambda(\mathbf{x})$ — упругий параметр Ламе. Выражение (63) также записывается в виде

$$t_{ik} = -p(\mathbf{x}) \delta_{ik}, \quad (64)$$

где $p(\mathbf{x})$ — давление, один из параметров, характеризующий состояние среды в точке \mathbf{x} . Объединяя выражения (63) и (64) получаем следующее равенство:

$$\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{p(\mathbf{x})}{\lambda(\mathbf{x})}. \quad (65)$$

Подставляя выражение (64) в уравнение (61) получаем систему уравнений относительно компонент $u_i(\mathbf{x}, t)$ вектора смещения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$:

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \quad (66)$$

или в векторном виде

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\nabla p(\mathbf{x}, t) \quad (67)$$

где $\nabla = \text{grad}$ — оператор дифференцирования. Для простоты уравнения (5) и (6) записаны в области без источников. Поделим на $\rho(\mathbf{x})$ обе части выражения и возьмем дивергенцию от получившегося равенства:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla p(\mathbf{x}, t), \quad (68)$$

$$\operatorname{div} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla p(\mathbf{x}, t) \right). \quad (69)$$

Производную по времени и оператор дивергенции можно поменять местами:

$$\operatorname{div} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (70)$$

Дивергенция от произведения векторной функции \mathbf{g} на скалярную h записывается в виде

$$\operatorname{div}(h\mathbf{g}) = \nabla h \cdot \mathbf{g} + h \operatorname{div} \mathbf{g}, \quad (71)$$

где символом “ \cdot ” обозначена операция скалярного произведения. В итоге получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \operatorname{div} \nabla p(\mathbf{x}, t) \quad (72)$$

с учетом выражения (65), $\operatorname{div} \nabla = \Delta$ и

$$\nabla \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} = -\frac{\nabla \rho(\mathbf{x})}{\rho^2(\mathbf{x})} \quad (73)$$

получаем

$$-\frac{1}{\lambda(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho^2(\mathbf{x})} \nabla \rho(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \Delta p(\mathbf{x}, t). \quad (74)$$

После умножения этого выражения на $\rho(\mathbf{x})$ и запишем отношение через $c(\mathbf{x})$ следующим образом:

$$\frac{\lambda(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} = c^2(\mathbf{x}), \quad (75)$$

получаем уравнение движения:

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \Delta p(\mathbf{x}) - \frac{1}{\rho^2(\mathbf{x})} \nabla \rho(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t). \quad (76)$$

Величина $c(\mathbf{x})$ — имеет смысл скорости распространения волны давления в среде. В случае, когда плотность в среде постоянна $\rho(\mathbf{x}) = \text{const}$ уравнение (76) превращается в волновое уравнение

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \Delta p(\mathbf{x}, t) \quad (77)$$

Таким образом, процесс движения “частиц” жидкости или процесс распространения волны давления, как и большинство физических процессов, облечен в форму математического уравнения (76), которое является линейным гиперболическим уравнением в частных производных.

Приложение 2. Решение акустического уравнения лучевым методом

Рассмотрим акустическое уравнение для неоднородной среды в области без источников

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) - \frac{\rho(\mathbf{x})}{\lambda(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \rho(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (78)$$

Представим поле давления $p(\mathbf{x}, t)$ в виде Фурье-преобразования по времени:

$$p(\mathbf{x}, t) = \Re \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty P(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \right). \quad (79)$$

После подстановки (79) в уравнение (78) получаем дифференциальное уравнение в частных производных относительно спектральной функции $P(\mathbf{x}, \omega)$:

$$\Delta P(\mathbf{x}, \omega) - \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \rho(\mathbf{x}) \cdot \nabla P(\mathbf{x}, \omega) - \Delta P(\mathbf{x}, \omega) + \omega^2 \frac{\rho(\mathbf{x})}{\lambda(\mathbf{x})} P(\mathbf{x}, \omega) = 0. \quad (80)$$

Будем искать решение в виде:

$$P(\mathbf{x}, \omega) = A(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega \tau(\mathbf{x})}, \quad (81)$$

где $A(\mathbf{x}, \omega)$ и $\tau(\mathbf{x})$ — медленно меняющиеся функции пространственных координат, ω — большой параметр. Вычислим необходимые для подстановки в уравнение (80) производные, используя представление решения в виде (81):

$$\nabla P(\mathbf{x}, \omega) = \nabla \left(A(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega \tau(\mathbf{x})} \right) = e^{-i\omega \tau(\mathbf{x})} \left(\nabla A(\mathbf{x}, \omega) - i\omega A(\mathbf{x}, \omega) \nabla \tau(\mathbf{x}) \right). \quad (82)$$

$$\Delta P(\mathbf{x}, \omega) = e^{-i\omega \tau(\mathbf{x})} \left(A(\mathbf{x}, \omega) (-\omega^2 (\nabla \tau)^2 - i\omega \Delta \tau(\mathbf{x})) - 2i\omega (\nabla A(\mathbf{x}, \omega) \cdot \nabla \tau(\mathbf{x})) + \Delta A(\mathbf{x}, \omega) \right). \quad (83)$$

Уравнение (80) записывается в виде

$$\begin{aligned} e^{-i\omega \tau(\mathbf{x})} \Delta A + e^{-i\omega \tau(\mathbf{x})} \frac{\omega^2}{c^2} A - e^{-i\omega \tau(\mathbf{x})} \frac{\nabla \rho \cdot \nabla A}{\rho} + e^{-i\omega \tau(\mathbf{x})} \frac{i\omega A \nabla \rho \cdot \nabla \tau}{\rho} - \\ - e^{-i\omega \tau(\mathbf{x})} A \omega^2 (\nabla \tau)^2 + e^{-i\omega \tau(\mathbf{x})} i A \omega \Delta \tau - e^{-i\omega \tau(\mathbf{x})} 2i\omega (\nabla A \cdot \nabla \tau) = 0. \end{aligned}$$

Перегруппировывая члены по степеням ω и сокращая множитель $e^{-i\omega\tau(\mathbf{x})}$, встречающийся в каждом слагаемом, получаем:

$$\omega^2 \left(A(\nabla\tau)^2 - A \frac{1}{c^2} \right) + i\omega \left(A \triangle\tau + 2(\nabla A \cdot \nabla\tau) - A \frac{\nabla\rho \cdot \nabla\tau}{\rho} \right) + \left(\frac{\nabla\rho \cdot \nabla A}{\rho} - \triangle A \right) = 0. \quad (84)$$

Будем искать амплитуду $A(\mathbf{x}, \omega)$ в виде формального разложения по обратным степеням большого параметра ω :

$$A(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\mathbf{x})}{(i\omega)^n} = A_0(\mathbf{x}) + \frac{A_1(\mathbf{x})}{i\omega} + \frac{A_2(\mathbf{x})}{(i\omega)^2} + \dots \quad (85)$$

Функции $A_n(\mathbf{x})$ предполагаются гладкими и медленно меняющимися с функциями пространственных координат \mathbf{x} . Подстановка представления амплитудного множителя (85) в уравнение (84) позволяет получить систему рекуррентных уравнений относительно функций $A_n(\mathbf{x})$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{A_n}{(i\omega)^{n-2}c^2} - \frac{A_n(\nabla\tau)^2}{(i\omega)^{n-2}} - \frac{A_n \nabla\rho \cdot \nabla\tau}{\rho(i\omega)^{n-1}} + \frac{A_n \triangle\tau}{(i\omega)^{n-1}} + 2 \frac{\nabla A_n \cdot \nabla\tau}{(i\omega)^{n-1}} + \frac{\nabla\rho \cdot \nabla A_n}{\rho(i\omega)^n} - \frac{\triangle A_n}{(i\omega)^n} \right] = 0. \quad (86)$$

Перегруппируем этот ряд и соберем члены с одинаковыми степенями ω :

$$\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(i\omega)^n} \left[\frac{A_{n+2}}{c^2} - A_{n+2}(\nabla\tau)^2 - \frac{A_{n+1} \nabla\rho \cdot \nabla\tau}{\rho} + A_{n+1} \triangle\tau + 2 \nabla A_{n+1} \cdot \nabla\tau + \frac{\nabla\rho \cdot \nabla A_n}{\rho} - \triangle A_n \right] = 0. \quad (87)$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях ω получаем рекуррентную систему линейных уравнений:

$$\left(\frac{1}{c^2} - (\nabla\tau)^2 \right) A_{n+2} - \frac{A_{n+1} \nabla\rho \cdot \nabla\tau}{\rho} + A_{n+1} \triangle\tau + 2 \nabla A_{n+1} \cdot \nabla\tau + \frac{\nabla\rho \cdot \nabla A_n}{\rho} - \triangle A_n = 0. \quad (88)$$

При $n = -2$ уравнение принимает вид

$$\left(\frac{1}{c^2} - (\nabla\tau)^2 \right) A_0 = 0. \quad (89)$$

Считая, что главный член разложения $A_0(\mathbf{x})$ не равен нулю, получим уравнение:

$$\frac{1}{c^2} - (\nabla\tau)^2 = 0. \quad (90)$$

Это уравнение называется уравнением эйконала, при этом функцию $\tau(\mathbf{x})$ называют эйконалом. Решение уравнения эйконала позволяет найти функцию $\tau(\mathbf{x})$. Благодаря тому, что уравнение (90) не зависит от значка n , первый член в уравнении (88) обращается в нуль при всех n , поэтому это уравнение для $n > -2$ принимает вид:

$$A_{n+1} \triangle\tau - \frac{A_{n+1} \nabla\rho \cdot \nabla\tau}{\rho} + 2 \nabla A_{n+1} \cdot \nabla\tau + \frac{\nabla\rho \cdot \nabla A_n}{\rho} - \triangle A_n = 0. \quad (91)$$

Это уравнение определяет амплитуды $A_n(\mathbf{x})$ членов лучевого ряда (85) и называется уравнением переноса.

Рассматривая решение уравнения переноса для $n = -1$ можно найти первый член разложения $A_0(\mathbf{x})$:

$$-\frac{A_0 \nabla \rho \cdot \nabla \tau}{\rho} + A_0 \triangle \tau + 2 \nabla A_0 \cdot \nabla \tau = 0. \quad (92)$$

Поеделим это выражение на ρ :

$$-\frac{A_0 \nabla \rho \cdot \nabla \tau}{\rho^2} + \frac{A_0}{\rho} \triangle \tau + 2 \frac{1}{\rho} \nabla A_0 \cdot \nabla \tau = 0, \quad (93)$$

$$-\frac{\nabla \rho}{\rho^2} = \nabla \frac{1}{\rho}, \quad (94)$$

$$A_0 \left(\nabla \frac{1}{\rho} \cdot \nabla \tau + \frac{1}{\rho} \triangle \tau \right) + 2 \frac{1}{\rho} \nabla A_0 \cdot \nabla \tau = 0, \quad (95)$$

Для преобразования последнего выражения необходимо воспользоваться следующими равенствами:

$$\nabla \tau = \frac{1}{c} \mathbf{t}, \quad (96)$$

где \mathbf{t} — единичный вектор, ортогональный поверхности волнового фронта $\tau(\mathbf{x}) = \text{const}$.

$$\nabla A_0 \cdot \nabla \tau = \frac{1}{c} \nabla A_0 \cdot \nabla \mathbf{t} = \frac{1}{c} \frac{dA_0}{ds} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} A_0. \quad (97)$$

Аналогично

$$\nabla \frac{1}{\rho} \cdot \nabla \tau = \frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho} \right). \quad (98)$$

$$\triangle \tau = \frac{1}{Jc} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{c} \right). \quad (99)$$

Подставляя выражения (97), (98), (99) в уравнение (95) получим:

$$A_0 \left(\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{Jc\rho} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{c} \right) \right) + \frac{2}{c^2 \rho} \frac{d}{d\tau} A_0 = 0. \quad (100)$$

Умножим (100) на J и на c :

$$A_0 \left(\frac{J}{c} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{c} \right) \right) + 2 \frac{J}{c\rho} \frac{d}{d\tau} A_0 = 0, \quad (101)$$

$$A_0 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{c\rho} \right) + 2 \frac{J}{c\rho} \frac{d}{d\tau} A_0 = 0. \quad (102)$$

После умножения на A_0 данное выражение образует полный дифференциал и может быть легко разрешено:

$$\frac{d}{d\tau} \left(A_0^2 \frac{J}{c\rho} \right) = 0, \quad (103)$$

$$A_0^2 \frac{J}{c\rho} = \text{const}. \quad (104)$$

Константа в правой части выражения может зависеть от лучевых координат α и β , следовательно

$$A_0 = \phi_0(\alpha, \beta) \sqrt{\frac{c\rho}{J}}. \quad (105)$$

Для последующих членов лучевого ряда (т.е. в случае $n > -1$) уравнение переноса имеет вид:

$$-\frac{A_{n+1} \nabla \rho \cdot \nabla \tau}{\rho} + A_{n+1} \Delta \tau + 2 \nabla A_{n+1} \cdot \nabla \tau + \frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_n}{\rho} - \Delta A_n = 0. \quad (106)$$

Преобразуем его способом аналогичным предыдущему случаю ($n = -1$). Поделим на ρ :

$$-\frac{A_{n+1} \nabla \rho \cdot \nabla \tau}{\rho^2} + \frac{A_{n+1}}{\rho} \Delta \tau + \frac{2}{\rho} \nabla A_{n+1} \cdot \nabla \tau + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_n}{\rho} - \Delta A_n \right) = 0, \quad (107)$$

с учетом выражения (94) получим:

$$A_{n+1} \nabla \frac{1}{\rho} \cdot \nabla \tau + \frac{A_{n+1}}{\rho} \Delta \tau + \frac{2}{\rho} \nabla A_{n+1} \cdot \nabla \tau + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_n}{\rho} - \Delta A_n \right) = 0, \quad (108)$$

используя выражения (97), (98), (99) получаем:

$$\frac{A_{n+1}}{c^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{A_{n+1}}{\rho} \frac{1}{Jc} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{c} \right) + \frac{2}{\rho c^2} \frac{d}{d\tau} A_{n+1} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_n}{\rho} - \Delta A_n \right) = 0, \quad (109)$$

умножая обе части выражения на J и на c

$$A_{n+1} \frac{J}{c} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\rho} \right) + A_{n+1} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{c} \right) + \frac{2}{\rho c} \frac{d}{d\tau} A_{n+1} + \frac{Jc}{\rho} \left(\frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_n}{\rho} - \Delta A_n \right) = 0, \quad (110)$$

$$A_{n+1} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{\rho c} \right) + 2 \frac{J}{\rho c} \frac{d}{d\tau} A_{n+1} + \frac{Jc}{\rho} \left(\frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_n}{\rho} - \Delta A_n \right) = 0, \quad (111)$$

поделим обе части выражения (111) на $2 \left(\frac{J}{\rho c} \right)^{1/2}$:

$$A_{n+1} \frac{1}{2} \left(\frac{J}{\rho c} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{\rho c} \right) + \left(\frac{J}{\rho c} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{d\tau} A_{n+1} + \left(\frac{J}{\rho c} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{Jc}{2\rho} \left(\frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_n}{\rho} - \Delta A_n \right) = 0 \quad (112)$$

и, учитывая, что

$$\frac{d}{d\tau} \left(\left(\frac{J}{\rho c} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{J}{\rho c} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{\rho c} \right), \quad (113)$$

получаем:

$$A_{n+1} \frac{d}{d\tau} \left(\left(\frac{J}{\rho c} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \left(\frac{J}{\rho c} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{d\tau} A_{n+1} + \left(\frac{J}{\rho c} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{Jc}{2\rho} \left(\frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_n}{\rho} - \Delta A_n \right) = 0. \quad (114)$$

Первые два члена соответствуют производной от произведения, поэтому

$$\frac{d}{d\tau} \left(A_{n+1} \left(\frac{J}{\rho c} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \left(\frac{J}{\rho c} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{Jc}{2\rho} \left(\frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_n}{\rho} + \Delta A_n \right). \quad (115)$$

Это выражение представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение. Решение ищется в виде суммы двух решений, первое из которых соответствует решению однородного уравнения, а второе соответствует решению неоднородного уравнения (частное решение). Соответствующее (115) однородное дифференциальное уравнение решается аналогично (102):

$$A_{n+1} = \phi_{n+1}(\alpha, \beta) \sqrt{\frac{c\rho}{J}}. \quad (116)$$

Решение неоднородного уравнения (115) записывается в виде

$$A_{n+1} = \sqrt{\frac{\rho c}{J}} \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{\frac{J}{c\rho}} \frac{c^2}{2} \left(\frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_n}{\rho} + \Delta A_n \right) d\tau. \quad (117)$$

Таким образом, выражение для амплитуды лучевого ряда при $n > -1$ имеет вид:

$$A_{n+1} = \sqrt{\frac{\rho c}{J}} \left(\phi_{n+1}(\alpha, \beta) + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{\frac{J}{c\rho}} \frac{c^2}{2} \left(\frac{\nabla \rho \cdot \nabla A_n}{\rho} + \Delta A_n \right) d\tau \right). \quad (118)$$

Второе слагаемое в этой формуле описывает влияние предыдущего приближения, т.е. A_n , из-за взаимодействия (продольной и поперечной диффузии амплитуды) соседних лучевых трубок. Это слагаемое в виде интеграла описывает историю их взаимодействия от начальной поверхности до рассматриваемой точки. Поскольку A_n в свою очередь связано с A_{n-1} , то фактически второе слагаемое — это влияние на A_{n+1} всех предыдущих приближений от A_0 до A_n включительно [10].

Приложение 3. Вспомогательные вычисления для аналитического построения волновых фронтов

Предполагаем, что точечный источник расположен в точке S . Луч SM , падающий на горизонтальную границу раздела двух сред ($V_1 < V_2$) под углом $\theta_1 < \theta_c$, преломляется под углом θ_2 во вторую среду. Углы θ_1 и θ_2 связаны между собой законом Снеллиуса:

$$\frac{\sin \theta_1}{V_1} = \frac{\sin \theta_2}{V_2}. \quad (119)$$

Угол θ_c определяется по формуле:

$$\sin \theta_c = \frac{V_1}{V_2} \quad (120)$$

и называется критическим углом падения.

Кроме преломленного луча ML , при падении луча SM на горизонтальную границу раздела двух сред под углом $\theta_1 < \theta_c$ образуется луч, отраженный под углом θ_1 и распространяющийся в первой среде. На рисунке 49 отраженный луч не изображен.

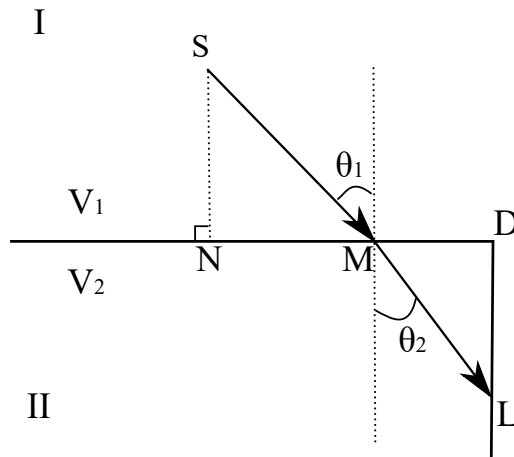


Рис. 49. Геометрия задачи.

Обозначим переменной T время, за которое луч, выходящий из точки S , достигает вертикальной границы раздела двух сред, точки L :

$$T = t_1 + t_2, \quad (121)$$

где t_1 — время пробега вдоль падающего луча SM , t_2 — время пробега вдоль преломленного луча ML . Зафиксируем местоположение источника S . Расстояние до горизонтальной границы SN и расстояние ND будем считать известными. Найдём величину угла θ_1 .

Расстояние от точки N до точки D можно записать в виде суммы двух отрезков NM и MD :

$$ND = NM + MD. \quad (122)$$

Отрезок NM найдём из прямоугольного треугольника SNM по формуле

$$NM = SN \tan \theta_1. \quad (123)$$

Отрезок ML найдём из прямоугольного треугольника DLM по формуле

$$NM = V_2 t_2 \sin \theta_2. \quad (124)$$

С учетом выражений (121) и (119) последняя формула переписывается в виде

$$NM = V_2 \left(T - t_1 \right) \frac{V_2}{V_1} \sin \theta_1. \quad (125)$$

Время пробега вдоль луча SM можно найти по формуле

$$t_1 = \frac{SN}{\cos \theta_1 V_1}. \quad (126)$$

поэтому выражение (127) принимает вид:

$$NM = V_2 \left(T - \frac{SN}{\cos \theta_1 V_1} \right) \frac{V_2}{V_1} \sin \theta_1 = \frac{V_2^2}{V_1} \left(T - \frac{SN}{\cos \theta_1 V_1} \right) \sin \theta_1, \quad (127)$$

поэтому

$$ND = SN \tan \theta_1 + \frac{V_2^2}{V_1} \left(T - \frac{SN}{\cos \theta_1 V_1} \right) \sin \theta_1 = SN \tan \theta_1 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \right) + \frac{V_2^2}{V_1} T \sin \theta_1. \quad (128)$$

Определим как связаны $\sin \theta_1$ и $\tan \theta_1$. Запишем простое тригонометрическое соотношение:

$$\frac{1}{\tan^2 \theta_1} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \theta_1}, \quad (129)$$

$$\sin^2 \theta_1 = \frac{1}{\frac{1}{\tan^2 \theta_1} + 1}, \quad (130)$$

$$\sin \theta_1 = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\tan^2 \theta_1} + 1}}. \quad (131)$$

$$ND = SN \tan \theta_1 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \right) + \frac{V_2^2}{V_1} T \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\tan^2 \theta_1} + 1}}. \quad (132)$$

Обозначая $\tan^2 \theta_1 = x$ получаем следующее уравнение

$$SN \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \right) x + \frac{V_2^2}{V_1} T \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x} + 1}} - ND = 0. \quad (133)$$

Приложение 4. Преобразование Гильберта

Предположим, что функция $S(t)$ имеет норму L_p :

$$S(t) \in L_p(-\infty, \infty), \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^p dt < \infty, p \geq 1. \quad (134)$$

В этом случае прямое и обратное преобразования Гильберта можно представить в виде

$$Q(t) = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\tau)}{t - \tau} d\tau = -S(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (135)$$

и

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\tau)}{t - \tau} d\tau = Q(t) * \frac{1}{\pi t}, \quad (136)$$

где v.p. означает, что интегрирование в окрестности точки $t = \tau$ осуществляется в смысле главного значения. Символ “*” обозначает операцию свертки. Найдем спектр функции $Q(t)$:

$$Q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) e^{i\omega t} dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\tau - t} dt d\tau. \quad (137)$$

Делая замену переменных $\tau - t = u$ и используя следующее равенство:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega u}{u} du = \frac{\pi}{2} \text{sign} \omega, \quad (138)$$

выражение (137) можно преобразовать к виду

$$Q(\omega) = -iS(\omega) \text{sign} \omega. \quad (139)$$

Отметим, что

$$|Q(\omega)| = |S(\omega)|, \arg Q(\omega) = \arg S(\omega) \pm \frac{\pi}{2}. \quad (140)$$

Величина $Q(\omega)$ является квадратурным фильтром, который изменяет фазу на $\pm \frac{\pi}{2}$ и не оказывает воздействия на амплитуду спектра [55].

Пусть $Z(t)$ — аналитический сигнал (комплексная функция, зависящая от времени):

$$Z(t) = S(t) + iQ(t) \text{ или } Z(t) = a(t)e^{i\phi(t)}, \quad (141)$$

где

$$S(t) = \Re Z(t) = a(t)\cos\phi(t), \quad (142)$$

$$Q(t) = \Im Z(t) = a(t)\sin\phi(t). \quad (143)$$

Следовательно, амплитуда и фаза сигнала записываются в виде

$$a(t) = \sqrt{S^2(t) + Q^2(t)} \text{ и } \phi(t) = \arctan \frac{S(t)}{Q(t)}. \quad (144)$$

Применяя преобразование Гильберта к аналитическому сигналу $Z(t)$ (141), получим следующее выражение:

$$H[Z(t)] = H[S(t) + iQ(t)] = iS(t) + Q(t). \quad (145)$$

Модуль от преобразования Гильберта

$$|H[Z(t)]| = \sqrt{S^2(t) + Q^2(t)}. \quad (146)$$

Учитывая выражение (144) приходим к выводу, что

$$|H[Z(t)]| = a(t). \quad (147)$$

Таким образом, преобразование Гильберта позволяет определять огибающую аналитического сигнала.

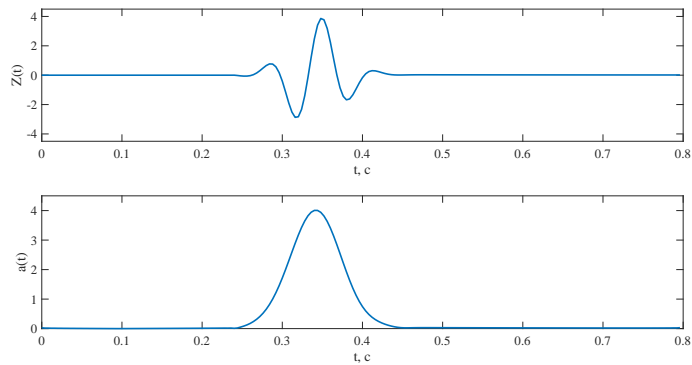


Рис. 50. Сигнал $Z(t)$ и его огибающая $a(t)$, полученная при помощи преобразования Гильберта.